

Федеральное агентство связи Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждения высшего образования «Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (СибГУТИ)

**И.В. Грищенко, А.И. Гулидов, А.Г. Иванова**

**Контрольная работа №2  
по курсу физики для бакалавров. Заочная форма  
обучения с применением дистанционных образова-  
тельных технологий. Учебное пособие.**

**Новосибирск**

**2020**

И.В. Грищенко, А.И. Гулидов, А.Г. Иванова

Контрольная работа №2 по курсу физики для бакалавров. Заочная форма обучения с применением дистанционных образовательных технологий. Учебное пособие/ СибГУТИ. – Новосибирск. – 2020. – 95 с.

Методическое пособие для студентов заочной формы обучения с применением дистанционных образовательных технологий по физике предназначено для оказания помощи студентам Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики при подготовке к выполнению контрольной работы №2.

Кафедра физики.

Рисунков – 56, таблиц – 1, список литературы – 15 наименований

© Сибирский государственный  
университет телекоммуникаций  
и информатики 2020

## Оглавление

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                               | 4  |
| 1. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА .....                                     | 6  |
| 1.1. Интерференция световых волн .....                       | 7  |
| 1.2. Дифракция световых волн .....                           | 18 |
| 1.3. Поляризация световых волн .....                         | 23 |
| 2. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ..... | 43 |
| 2.1. Корпускулярно-волновой дуализм .....                    | 43 |
| 2.2. Тепловое излучение .....                                | 43 |
| 2.3. Световое давление .....                                 | 47 |
| 2.4. Внешний фотоэффект .....                                | 49 |
| 2.5. Эффект Комптона .....                                   | 53 |
| 3. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ .....                           | 57 |
| 3.1. Боровская модель атома водорода .....                   | 57 |
| 3.2. Волны де Бройля .....                                   | 61 |
| 3.3. Соотношения неопределенностей Гейзенберга .....         | 65 |
| 3.4. Волновая функция и ее физический смысл .....            | 67 |
| 3.5. Уравнение Шрёдингера .....                              | 69 |
| 4. ПОЛУПРОВОДНИКИ .....                                      | 77 |
| 4.1 Кристаллическая структура твердых тел .....              | 77 |
| 4.2 Зонная структура кристаллов .....                        | 79 |
| 4.3 Собственные полупроводники .....                         | 81 |
| 4.4 Примесные полупроводники .....                           | 86 |
| 4.5 Контакт электронного и дырочного полупроводников .....   | 89 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ .....                                             | 93 |
| ЛИТЕРАТУРА .....                                             | 95 |

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее методическое пособие предназначено для помощи студентам заочной формы обучения с применением дистанционных образовательных технологий при самостоятельной работе над теоретическим курсом и при решении задач контрольной работы №2. Объём и теоретический уровень изложения материала, включённого в пособие, определяется действующей рабочей программой, учитывает специфику СибГУТИ, а также результаты анализа наиболее типичных ошибок, допускаемых студентами заочного факультета при самостоятельном изучении курса физики.

Материал, представленный в пособии, охватывает четыре раздела: волновая оптика, квантовая оптика, квантовая механика и полупроводники. В начале каждого раздела излагаются основные понятия, формулировки законов, приведены основные уравнения и формулы, показаны возможности и границы применения законов. В каждом разделе приводятся примеры решения типовых задач. Набор основных физических постоянных находится в приложении. В приложении к данному методическому пособию находятся варианты контрольной работы.

### Правила оформления контрольной работы

1. Номер варианта соответствует последней цифре пароля доступа. Для зачета работы необходимо выполнить все задачи и большинство задач должны быть решены правильно.
2. Все работы принимаются только в электронной форме, **выполненные с помощью любого доступного редактора** (расширения файлов doc, docx, rtf)
3. Работа должна начинаться с титульного листа с указанием Вашей фамилии, группы, варианта, реквизитов студента, номера контрольной работы.
4. Для каждой задачи должно быть приведено полное условие задачи, а также её краткое условие, с записью основных исходных данных; если данные даны в произвольной системе единиц, то необходимо их перевести в систему СИ.
5. Приведено полное решение задачи, с пояснениями хода решения (если приведены только формулы, без пояснений, то задача не считается решённой).
6. Произведён расчёт требуемых величин и записан ответ с учётом размерности.
7. Формулы должны быть набраны средствами встроенного редактора формул Вашего редактора. Решение задач, вставленное целиком в виде рисунка, не принимается.

8. Пояснительные чертежи и схемы выполняются любым из трех способов: 1) непосредственно средствами текстового редактора; 2) используется любой графический редактор, и выполненный рисунок вставляется в документ контрольной работы; 3) чертеж выполняется вручную на бумаге, фотографируется (сканируется) и вставляется в виде рисунка в документ.
9. Если работа не зачтена и отправлена на доработку, то работу над ошибками необходимо сделать В ЭТОМ ЖЕ файле, не удаляя замечания, просто добавляя верное решение в конце каждой задачи.

# 1. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

## Световая волна

Световая волна представляет собой электромагнитную волну, в которой совершают колебания электрические и магнитные поля. Частным видом электромагнитной волны является монохроматическая волна, в которой векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  меняются по гармоническому закону с одинаковой частотой (рис. 1.1). Запишем уравнения плоской электромагнитной волны в проекции на оси координат:

$$E_y = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha); \quad H_z = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (1.1)$$

где  $\omega$  – циклическая частота волны,  $k$  – волновое число равное  $\frac{2\pi}{\lambda}$  или  $\frac{\omega}{v}$ ,  $E_m$  – амплитуда напряженности электрического поля,  $H_m$  – амплитуда напряженности магнитного поля.

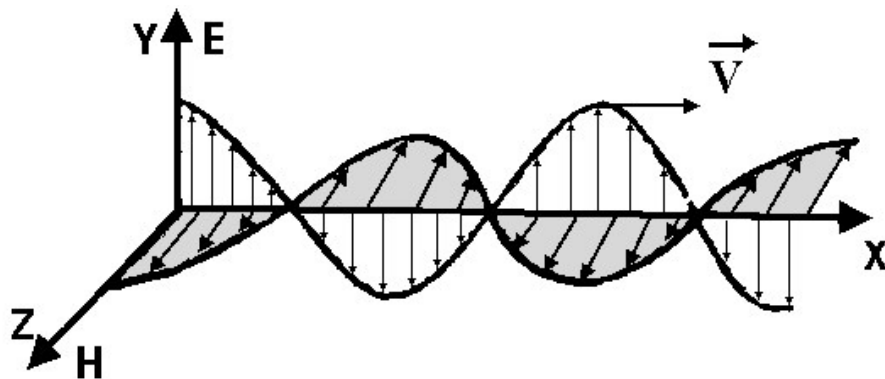


Рис. 1.1 Плоская электромагнитная волна.

Как следует из опытных фактов, физическое, физиологическое, фотохимическое воздействие в основном оказывает вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , а вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  оказывает слабое влияние. Поэтому вектор  $\vec{E}$  принято называть **световым вектором** и уравнение световой волны записывать для светового вектора.

С учётом выше сказанного, уравнение плоской бегущей монохроматической световой волны запишется в виде:

$$\vec{S}(r, t) = \vec{A} \cos(\omega t - kx + \alpha) \quad (1.2)$$

где  $\vec{A}$  – амплитуда светового вектора;  $\omega$  – циклическая частота колебаний;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны;  $t$  – время;  $x$  – координата волны;  $\alpha$  – начальная фаза волны (в дальнейших рассуждениях будем принимать её равной нулю);  $\Phi = \omega t - kx + \alpha$  – фаза волны.

## Скорость световой волны.

Скорость световой волны зависит от свойств среды, в которой волны распространяются и определяется по формуле:

$$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (1.3)$$

где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды;  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  – скорость света в вакууме.

Величина  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  называется **абсолютным показателем преломления среды**, с учётом этого скорость световой волны в среде равна:

$$V = \frac{c}{n} \quad (1.4)$$

Для вакуума  $\varepsilon = 1$ ;  $\mu = 1$ , поэтому скорость световой волны в вакууме равна скорости света  $c$ .

Если волна распространяется в среде с абсолютным показателем преломления  $n$ , то длина волны  $\lambda$  будет определяться по формуле:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (1.5)$$

где  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме;  $n$  – абсолютный показатель преломления среды.

**Оптическая длина пути** световой волны. Если волна проходит расстояние  $r$  в среде с абсолютным показателем преломления  $n$ , то оптическая длина пути световой волны:

$$L = nr \quad (1.6)$$

**Оптическая и геометрическая разность хода** световой волны. Пусть две волны распространяется в среде с абсолютным показателем преломления  $n$  от источников световых волн В и С (рис. 1.2), волна от источника В проходит расстояние  $ВМ = d_1$ , а волна от источника С проходит расстояние  $СМ = d_2$ . Тогда между волнами существует **геометрическая разность хода  $\Delta_z$**  и **оптическая разность хода  $\Delta$** :

$$\Delta_z = d_2 - d_1 \quad (1.7)$$

$$\Delta = L_2 - L_1 = nd_2 - nd_1 = n(d_2 - d_1) = n\Delta_z \quad (1.8)$$

**Принцип Гюйгенса.** Для волновой оптики справедлив принцип Гюйгенса, который утверждает: каждая точка среды, до которой дошёл волновой фронт, является источником вторичных сферических волн, а огибающая этих волн некоторое время спустя показывает положение волнового фронта в этот момент времени. Данный принцип позволяет рассчитывать положение волнового фронта световой волны в различных интерференционных и дифракционных схемах, а также в неоднородных оптических средах.

## 1.1. Интерференция световых волн

**Интерференцией волн** называется явление наложения двух или нескольких когерентных волн, в результате которого происходит усиления колебаний в одних и ослабление колебаний в других точках пространства. **Когерентные**

**волны** – это волны, разность фаз которых не изменяется во времени. Например, такими волнами являются две монохроматические волны с одинаковой частотой.

Для наблюдения устойчивой во времени интерференционной картины необходимы условия, при которых частоты, поляризация и разность фаз интерферирующих световых волн были бы постоянными в течение всего времени наблюдения.

## Интерференционные схемы в волновой оптике

### 1.1.1. Интерференция от двух источников. Схема Юнга

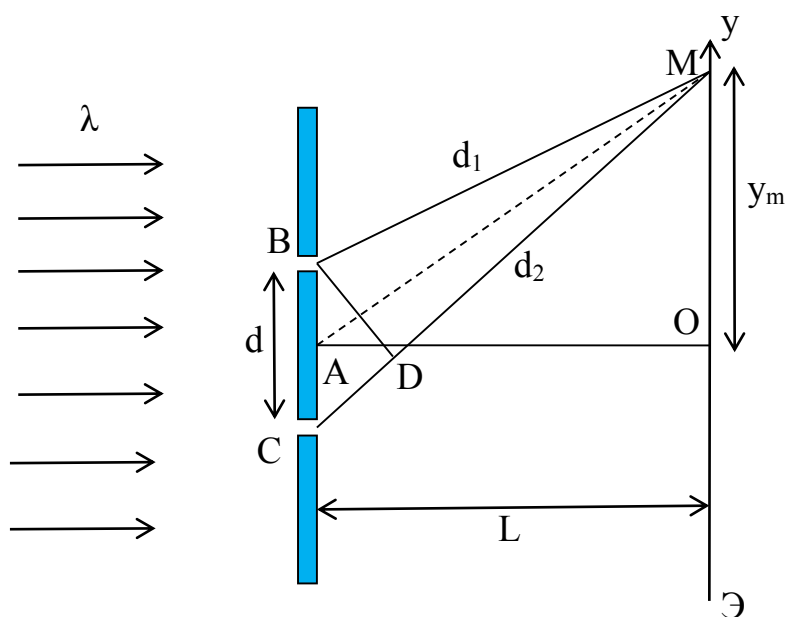


Рис. 1.2 Схема Юнга.  $B$ ,  $C$  – источники когерентных световых волн;  $\mathcal{E}$  – экран;  $M$  – точка экрана, где происходит наложение когерентных волн от источников  $B$  и  $C$ ;  $y_m$  – расстояние от центра экран до точки наблюдения  $M$ .

Это одна из первых схем в волновой оптике, которая была разработана Юнгом для наблюдения интерференции. С помощью данной схемы, мы получим основные расчётные формулы, используемые при решении задач по интерференции.

Плоская световая волна с длиной волны  $\lambda$  падает на преграду с двумя узкими щелями  $B$  и  $C$  (Рис. 1.2). Щели  $B$  и  $C$  вырезают из волнового фронта узкие участки, которые становятся в силу принципа Гюйгенса источниками вторичных сферических волн. Следовательно, эти щели являются источниками когерентных световых волн, которые с одинаковой частотой и длиной волны падают на экран. Расстояние между источниками равно  $d$ , расстояние от источников до экрана равно  $L$ . Точка  $A$  – середина между источниками  $B$  и  $C$ , точка  $O$  – центр экрана. Будем считать, что вся установка находится в среде с абсолютным показателем преломления  $n$ .

Пусть в точке  $M$  экрана происходит наложение когерентных волн от источников  $B$  и  $C$ . Луч света от источника  $B$  проходит расстояние  $BM = d_1$ , а луч света от источника  $C$  проходит расстояние  $CM = d_2$ . Получим условие усиления и ослабления волнами друг друга.

Уравнение колебаний монохроматической световой волны в точке  $M$ , вызываемые источником  $B$ :

$$\vec{S}_M^B = \vec{B} \cos(\omega t - kd_1), \quad (1.9)$$

а колебания, вызываемые источником  $C$ :

$$\vec{S}_M^C = \vec{C} \cos(\omega t - kd_2), \quad (1.10)$$

где  $\vec{B}$  и  $\vec{C}$  – амплитуды световых векторов колебаний источников;  $\omega$  – циклическая частота колебаний;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны, излучаемая источниками в среде с абсолютным показателем преломления  $n$ .

Результирующее колебание точки  $M$  это сумма возмущений  $\vec{S}_M^B$  и  $\vec{S}_M^C$ :

$$\vec{S}_M = \vec{S}_M^B + \vec{S}_M^C \quad (1.11)$$

Таким образом, в точке  $M$  складываются два однонаправленных колебания с одинаковой частотой. По правилам сложения однонаправленных колебаний мы должны использовать формулу

$$A_M = \sqrt{B^2 + C^2 + 2BC \cdot \cos \Delta\Phi} \quad (1.12)$$

где  $B$ ,  $C$  – амплитуды складываемых колебаний источников;  $A_M$  – амплитуда результирующего колебания;  $\Delta\Phi$  – разность фаз между источниками  $B$  и  $C$ .

Разность фаз  $\Delta\Phi$  определяется по формуле:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = (\omega t - kd_1) - (\omega t - kd_2) = k(d_2 - d_1) = k\Delta_e = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_e \quad (1.13)$$

где  $\Phi_1 = \omega t - kd_1$  – фаза волны от источника  $B$ ;  $\Phi_2 = \omega t - kd_2$  – фаза волны от источника  $C$ .

В точке  $M$  амплитуда  $A_M$  будет максимальна, когда  $\cos \Delta\Phi$  принимает максимальное значение равное 1. В этом случае волны усиливают друг друга, возникает максимум интерференции. И наоборот, амплитуда  $A_M$  будет минимальна, когда  $\cos \Delta\Phi$  принимает минимальное значение равное  $-1$ . В этом случае волны ослабляют друг друга, возникает минимум интерференции. Запишем эти условия:

$$\cos \Delta\Phi_{max} = 1 \quad (1.14)$$

$$\cos \Delta\Phi_{min} = -1 \quad (1.15)$$

Уравнение (1.14) будет определять точки **интерференционного максимума**, оно выполняется при разности фаз

$$\Delta\Phi_{max} = 2\pi m \quad (1.16)$$

где  $m = 0, 1, 2 \dots$  – порядок интерференционного максимума.

Уравнение (1.15) будет определять точки **интерференционного минимума**, оно выполняется при разности фаз

$$\Delta\Phi_{min} = 2\pi(m - \frac{1}{2}) \quad (1.17)$$

где  $m = 1, 2 \dots$  – порядок интерференционного минимума.

Формулы (1.16) и (1.17) определяют разность фаз  $\Delta\Phi$  для интерференционного максимума и минимума соответственно. Определим условие для оптической разности хода  $\Delta$  при интерференции световых волн.

Используя (1.13) и (1.16), получаем

$$\Delta\Phi_{max} = 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \Delta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \quad (1.18)$$

При выводе (1.18), мы использовали соотношение (1.5) между длиной волны  $\lambda$  в среде и длиной волны  $\lambda_0$  в вакууме. Из (1.16) и (1.18) следует условие **интерференционного максимума**:

$$\Delta_{max} = m\lambda_0 \quad (1.19)$$

где  $m = 0, 1, 2 \dots$  – порядок интерференционного максимума.

Используя (1.13) и (1.17), получаем

$$\Delta\Phi_{min} = 2\pi(m - \frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} n \Delta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta \quad (1.20)$$

Из (1.20) следует условие **интерференционного минимума**:

$$\Delta_{min} = \lambda_0 \left(m - \frac{1}{2}\right) = (2m - 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (1.21)$$

где  $m = 1, 2 \dots$  – порядок интерференционного минимума.

Иногда условие (1.21) записывают в виде:

$$\Delta_{min} = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (1.21a)$$

где  $m = 0, 1, 2 \dots$  – порядок интерференционного минимума. Уравнения (1.21) и (1.21a) эквивалентны, выбирается более удобное для данной задачи.

Отметим, что формулы (1.16), (1.17), (1.19), (1.21), (1.21a) являются общими для любых интерференционных схем, а не только для схемы Юнга.

### **Амплитуда колебания точки М:**

Амплитуда  $A_M$  зависит от положения точки на экране и может принимать значение от максимального до минимального. Максимальное значение  $A_M$  примет, когда  $\cos\Delta\Phi$  в (1.12) принимает максимальное значение равное +1, тогда:

$$A_{max} = \sqrt{B^2 + C^2 + 2BC} = B + C \quad (1.22)$$

Минимальное значение  $A_M$  примет, когда  $\cos\Delta\Phi$  в (1.12) принимает минимальное значение равное –1, тогда:

$$A_{min} = \sqrt{B^2 + C^2 - 2BC} = |B - C| \quad (1.23)$$

### **Положения интерференционного максимума и интерференционного минимума на экране**

Воспользуемся геометрией рисунка 1.2. Будем считать, что  $L \gg d$  – только в этом случае будет наблюдаться устойчивая интерференционная картина. Отложив из точки М вдоль большего отрезка  $d_2$  меньший отрезок  $d_1$  в направлении точки С, получим точку D. Отрезок  $CD = d_2 - d_1 = \Delta_r = \frac{\Delta}{n}$ , где  $\Delta_r$  – геометрическая разность хода;  $\Delta$  – оптическая разность хода между волнами от источников

В и С. Рассмотрим треугольники BCD и АМО. Учитывая, что  $L \gg d$  можно показать, что они подобны друг другу. Запишем условия подобия для данных треугольников:

$$\frac{y_m}{L} = \frac{CD}{d} \quad (1.24)$$

где  $y_m$  – расстояние от центра экрана до  $m$ -го максимума или минимума. Выражая из (1.24)  $y_m$ , получаем:

$$y_m = L \frac{CD}{d} = \frac{L}{nd} \Delta \quad (1.25)$$

Используя условия **интерференционного максимума** (1.19) и условия **интерференционного минимума** (1.21) получаем

$$y_m = \frac{L}{nd} m \lambda_0 \text{ положение } m\text{-го максимума} \quad (1.26)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  – порядок интерференционного максимума;

$$y_m = \frac{L}{nd} (2m - 1) \frac{\lambda_0}{2} \text{ положение } m\text{-го минимума} \quad (1.27)$$

где  $m = \pm 1, \pm 2 \dots$  – порядок интерференционного минимума. Здесь при расчете оптической разности хода  $\Delta$  использована формула (1.21), поскольку порядок интерференционного минимума  $m$  совпадает с номером тёмной полосы на экране (Рис. 1.3).

Из (1.26) и (1.27) следует, что максимумы и минимумы чередуются, а в центре экрана наблюдается максимум нулевого порядка (Рис. 1.3).

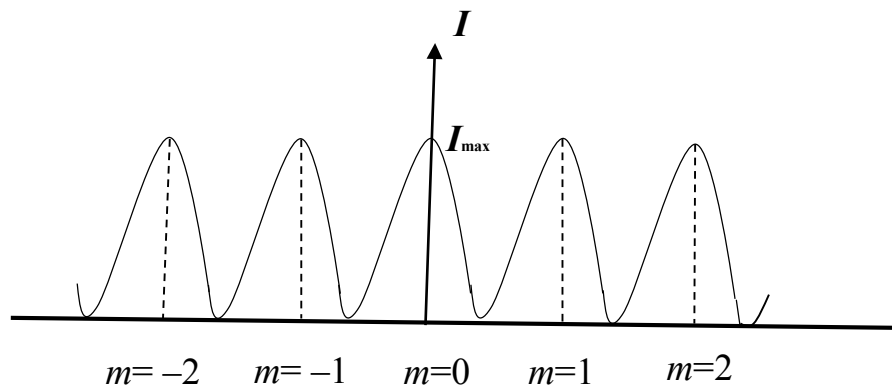


Рис. 1.3 Распределение интенсивности света ( $I$ ) на экране в опыте Юнга. Внизу подписаны порядковые номера интерференционных максимумов.

**Ширина интерференционного максимума.** По определению это расстояние между соседними минимумами  $\Delta y = y_m - y_{m-1}$ . Используя (1.27), получаем:

$$\Delta y = y_m - y_{m-1} = \frac{L \lambda_0}{nd} \quad (1.28)$$

### 1.1.2. Интерференция в тонкой пленке

На тонкую пленку толщиной  $d$  и показателем преломления  $n$  падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda$  (рис. 1.4). Угол падения световой волны равен  $\alpha$  и угол преломления  $\beta$ , они измеряются между нормалью и поверхностью

самой пленкой. Среда около пленки – воздух ( $n_{\text{в}} \approx 1$ ), поэтому  $n > n_{\text{в}}$ . Определим условие наблюдения максимума и минимума интерференции на тонкой пленке.

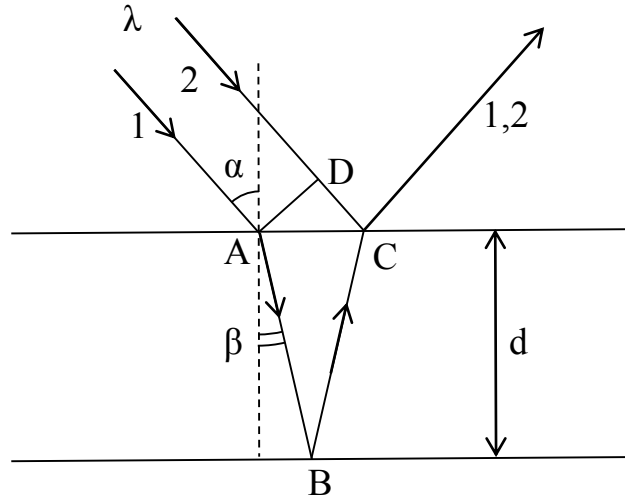


Рис. 1.4 Ход лучей в тонкой пленке толщиной  $d$  и показателем преломления  $n$ .

Интерферирующие лучи 1 и 2 показаны на рис. 1.4. Луч 1 проходит через пленку, преломляясь на верхней границе раздела, отражается от нижней границы пленки и выходит в точке С. Луч 2 отражается от верхней поверхности пленки и в точке С интерферирует с лучом 1. Оптическая разность хода между лучами 1 и 2 равна:

$$\Delta = L_1 - L_2 = n(AB + BC) - (DC + \frac{\lambda}{2}) \quad (1.29)$$

где  $L_1 = n(AB + BC)$  – оптическая длина пути луча 1;  $L_2 = (DC + \frac{\lambda}{2})$  – оптическая длина пути луча 2. Добавка  $\frac{\lambda}{2}$  для  $L_2$  объясняется тем, что при отражении световой волны от более плотной среды, волна приобретает дополнительную фазу, равную  $\pi$ , что соответствует дополнительной разности хода  $\frac{\lambda}{2}$ .

Используя геометрию рисунка и законы преломления света, можно доказать, что оптическая разность хода интерферирующих волн равна

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} \text{ или } \Delta = 2dncos\beta - \frac{\lambda}{2} \quad (1.30)$$

где  $\alpha$  – угол падения;  $\beta$  – угол преломления;  $n$  – показатель преломления пленки.

Запишем условие усиления волнами друг друга (максимум интерференции), используя (1.19) и (1.30):

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad (1.31)$$

Выразим из (1.31) толщину пленки, при которой интерферирующие волны будут усиливать друг друга

$$d_{max} = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (1.32)$$

где  $m = 0, 1, 2 \dots$  – порядок интерференционного максимума. При этом пленка будет касаться наблюдателю окрашенной в цвет с длиной волны  $\lambda$ .

Аналогично получим условие ослабления волнами друг друга (минимум интерференции), используя (1.21) и (1.30):

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = (2m - 1)\frac{\lambda}{2} \quad (1.33)$$

Выразим из (1.33) толщину пленки, при которой интерферирующие волны будут ослаблять друг друга

$$d_{min} = \frac{m\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad (1.34)$$

где  $m = 1, 2 \dots$  – порядок интерференционного минимума. При этом пленка будет касаться наблюдателю тёмной.

Обычно в природе мы наблюдаем такие пленки на поверхности воды. Поскольку толщина пленки может меняться от точки к точке, она будет казаться окрашенной в разные цвета оптического видимого диапазона, в зависимости от того какие лучи будут усиливать друг друга в данном месте.

### 1.1.3. Интерференция на клине (полосы равной толщины)

Две поверхности, расположенные под малым углом  $\alpha$  ( $\alpha \ll 1$ ), образуют систему, получившую название клин (Рис. 1.5).

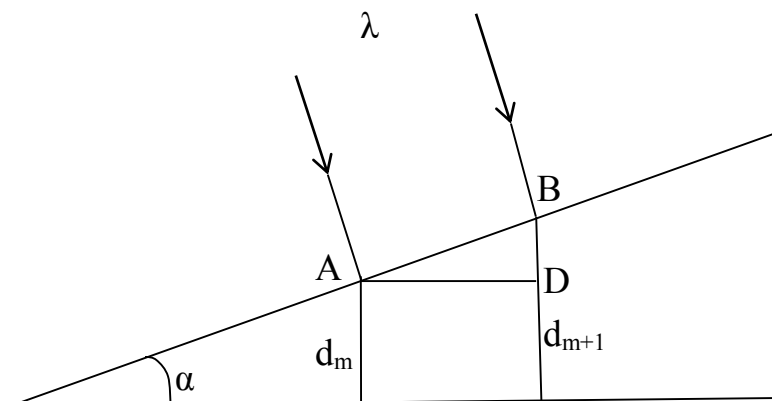


Рис. 1.5 Интерференция на клине.

Считаем, что клин представляет из себя среду с показателем преломления  $n$ . Клин имеет разную толщину, поэтому при освещении поверхности клина монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda$ , на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные максимумы и минимумы, т.к. в одних точках поверхности толщина клина соответствует условию наблюдения максимума, а в других – условию минимума. Данные максимумы и минимумы будут представлять из

себя набор светлых и тёмных полос, поэтому данная интерференционная картина получила название **полосы равной толщины**.

Определим расстояние между соседними интерференционными максимумами  $\Delta y$ .

Пусть в точке А поверхности клина возникает максимум  $m$ -го порядка. Толщина клина в данной точке равна  $d_m$ . В точке В возникает максимум  $(m+1)$ -го порядка. Соответственно толщина клина в этом месте равна  $d_{m+1}$ . Учтём, что луч падающий в точке А разделяется на два луча: 1) луч 1 прошедший внутрь клина и отражённый от нижней грани, он опять попадает в точку А, 2) луч 2 отражённый от верхней грани в точке А. Эти два луча интерферируют в точке А. Оптическая разность хода между лучами 1,2 равна

$$\Delta_m = L_1 - L_2 = 2d_m n - \frac{\lambda}{2} \quad (1.35)$$

В (1.35) мы учли, что луч 2 испытывает отражение от более плотной среды и получает дополнительную разность хода  $\frac{\lambda}{2}$ . Условие интерференционного максимума в точке А запишется

$$2d_m n - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad (1.36)$$

Аналогично запишем оптическую разность хода между лучами 1,2 равна в точке В.

$$\Delta_{m+1} = L_1 - L_2 = 2d_{m+1} n - \frac{\lambda}{2} \quad (1.37)$$

Условие интерференционного максимума в точке В запишется

$$2d_{m+1} n - \frac{\lambda}{2} = (m+1)\lambda \quad (1.38)$$

Вычитая почленно уравнение (1.36) из (1.38), получаем

$$2n(d_{m+1} - d_m) = \lambda \quad (1.39)$$

Выражая разность толщины клина в местах наблюдения  $m$ -го и  $(m+1)$ -го максимумов  $\Delta d = d_{m+1} - d_m$  из (1.39), получаем

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2n} \quad (1.40)$$

Из прямоугольного треугольника ABD запишем отношение BD к AD

$$\frac{BD}{AD} = \tan \alpha \quad (1.41)$$

Отметим, что  $BD = \Delta d$ ,  $AD = \Delta y$ . Из (1.41), учитывая (1.40), получаем искомое расстояние между соседними интерференционными максимумами

$$\Delta y = \frac{\Delta d}{\tan \alpha} = \frac{\lambda}{2n \tan \alpha} = \frac{\lambda}{2n\alpha} \quad (1.42)$$

В (1.42) мы учли, что  $\tan \alpha \approx \alpha$  при малых углах  $\alpha$  (значение угла записывается в радианах).

#### 1.1.4. Кольца Ньютона (в отражённом свете)

Частным случаем полос равной толщины являются кольца Ньютона, которые наблюдаются в отражённом свете в схеме, изображенной на рисунке 1. 6.

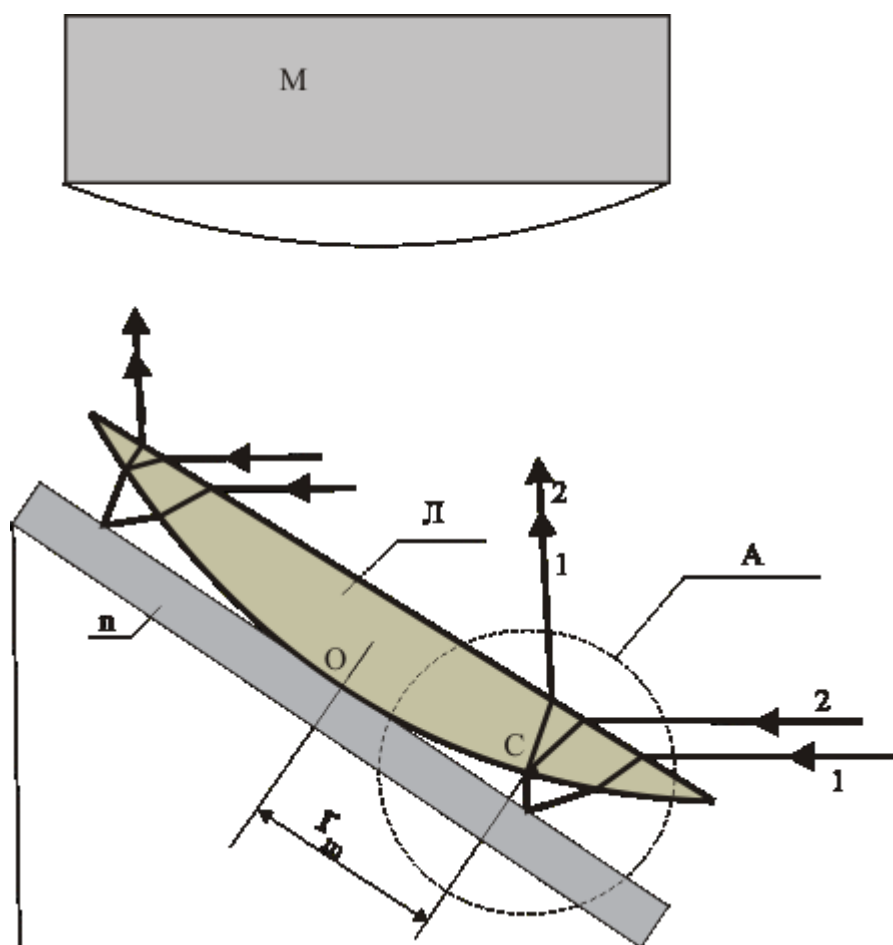


Рис. 1.6 Интерференция в линзе, лежащей выпуклой поверхностью на плоской пластине.

Плосковыпуклая линза с большим радиусом кривизны  $R$  и показателем преломления  $n_{\text{ст}}$  (для стекла  $n_{\text{ст}} \approx 1.5$ ) выпуклой поверхностью касается плоской пластины в точке  $O$ . Будем считать, что плоская пластина также имеет показатель преломления  $n_{\text{ст}}$ , а пространство между линзой и пластиной заполнено средой с показателем преломления  $n$ , причём  $n < n_{\text{ст}}$ . В верхней части Рис. 1.6 показано оптическое устройство (микроскоп) для наблюдения интерференционной картины. Параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda$  падает на плоскую поверхность линзы. Рассмотрим ход лучей из данного пучка. На Рис. 1.6 эти лучи выделены (лучи 1,2). Луч 1 проходит сквозь линзу, среду между линзой и пластиной, отражается от поверхности пластины и попадает в точку  $C$ . Луч 2 проходит сквозь линзу, отражается от выпуклой поверхности линзы в точке  $C$ . Таким образом, в точке  $C$  происходит наложение двух лучей 1 и 2. При одной разности хода эти лучи будут усиливать друг друга (возникают интерференционные мак-

симумы – светлые кольца), при другой ослаблять друг друга (возникают интерференционные минимумы – тёмные кольца). На Рис. 1.6 выделен радиус  $r_m$  одного из таких колец. Вид этих колец в случае монохроматического света показан на рис. 1.7.



Рис. 1.7 Кольца Ньютона.

В центре наблюдается минимум нулевого порядка (темное пятно). Центральный минимум окружен системой чередующихся окрашенных и темных колец, ширина и интенсивность которых постоянно убывает по мере удаления от центрального пятна.

**Расчет радиусов светлых и темных колец (Рис. 1.8).**

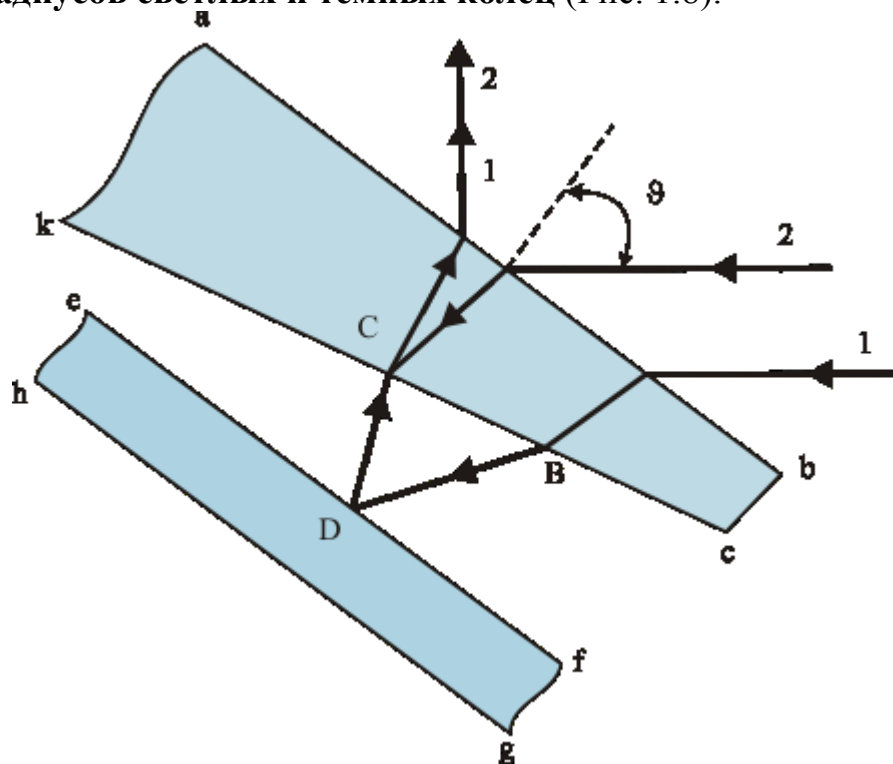


Рис. 1.8 Ход лучей в линзе, лежащей выпуклой поверхностью на плоской пластине.

Поскольку радиус кривизны линзы  $R$  много больше толщины зазора между линзой и пластиной, можно записать, что  $CD \approx DB \approx d$ , где  $d$  – толщина этого

зазора в данном месте (клинка между линзой и пластиной); тогда оптическая разность хода между лучами 1,2 может быть записана:

$$\Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2} \quad (1.43)$$

$n$  – показатель преломления среды между линзой и пластиной. В (1.43) мы учли, что луч 1 испытывает отражение от более плотной среды в точке D и получает дополнительную разность хода  $\frac{\lambda}{2}$ , а луч 2 при отражении в точке C не получает дополнительную разность хода  $\frac{\lambda}{2}$  из-за условия  $n < n_{\text{ст}}$ .

Из геометрии нашей системы следует связь между радиусом кольца  $r$ , радиусом кривизны  $R$  и толщиной клинка между линзой и пластиной  $d$ :

$$r^2 = 2Rd - d^2 \quad (1.44a)$$

Учитывая, что  $R \gg d$ , можем записать

$$r^2 = 2Rd \quad (1.44)$$

Выражая из (1.44)  $d$  и подставляя в (1.43), получаем:

$$\Delta = \frac{r^2}{R}n + \frac{\lambda}{2} \quad (1.45)$$

Радиусы светлых колец соответствуют интерференционному максимуму (см. 1.19), поэтому (1.45) мы можем переписать в виде:

$$\frac{r_m^2}{R}n + \frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad (1.46)$$

где  $m = 0,1,2 \dots$  – порядок интерференционного максимума;  $r_m$  – радиус светлого кольца  $m$  – го порядка.

Из (1.46) получаем радиус светлых колец:

$$r_m = \sqrt{\frac{(m-\frac{1}{2})\lambda R}{n}} = \sqrt{\frac{(2m-1)\lambda R}{2n}} \quad (1.47)$$

где  $m = 1,2 \dots$  – номер светлого кольца.

Радиусы тёмных колец соответствуют интерференционному минимуму (см. 1.21a), поэтому вместо (1.45) мы можем записать:

$$\frac{r_m^2}{R}n + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (1.48)$$

где  $m = 0,1,2 \dots$  – порядок интерференционного минимума;  $r_m$  – радиус тёмного кольца  $m$  – го порядка. Из (1.48) получаем радиус тёмных колец:

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda R}{n}} \quad (1.49)$$

где  $m = 0,1,2 \dots$  – номер тёмного кольца.

Формулы (1.47) и (1.49) получены для интерференционной картины в отражённом свете, но можно рассмотреть интерференционную картину в проходящем свете. Укажем без вывода, что в этом случае формула (1.47) соответствует условию минимума (тёмное кольцо), а (1.49) условию максимуму (светлое кольцо).

## 1.2. Дифракция световых волн

Огибание световыми волнами препятствий и проникновение в область геометрической тени называется дифракцией световых волн. Учёт дифракции становится необходимым при прохождении световых волн через отверстия в непрозрачных экранах, вблизи границ непрозрачных тел и т.п.

В волновой оптике доказывается, что необходимое условие наблюдения дифракции возникает при соотношении  $\frac{D^2}{4\lambda} \ll L$ , где  $D$  – размеры препятствия;  $L$  – расстояние от источника света до препятствия;  $\lambda$  – длина световой волны. Оценим размеры препятствия  $D$ , на которых в обычной практике может наблюдаться дифракция световых волн. Пусть  $L \sim 1$  м,  $\lambda \sim 0,5$  мкм, тогда  $D \ll 1,4 \cdot 10^{-3}$  м, т.е. размеры препятствия должны быть  $\sim 10$  мкм или меньше. Разрешение нашего глаза не позволяет различать такие размеры, поэтому картин дифракции в окружающем нас мире мы практически не наблюдаем. Но при определённых условиях, когда неоднородности среды находятся на расстояниях  $\sim 1$ – $10$  мкм, такие неоднородности образуют дифракционную решётку (проходящего или отражательного типа), в которой можно невооружённым взглядом наблюдать дифракцию световых волн. Хорошим примером дифракционной решётки отражательного типа является диск DVD, в котором при рассматривании под разными углами усиливаются волны разных длин волн.

Различаются два вида дифракции световых волн: **дифракция Френеля**, или дифракция в расходящихся лучах, и **дифракция Фраунгофера**, или дифракция в параллельных лучах.

В первом случае на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, который находится позади препятствия на конечном расстоянии от него.

Во втором случае на препятствие падает плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, который находится в фокальной плоскости собирающей линзы, установленной на пути прошедшего через препятствие света.

Далее мы рассмотрим подробно второй случай – дифракцию Фраунгофера.

### 1.2.1. Дифракция Фраунгофера на узкой длинной щели в непрозрачном экране

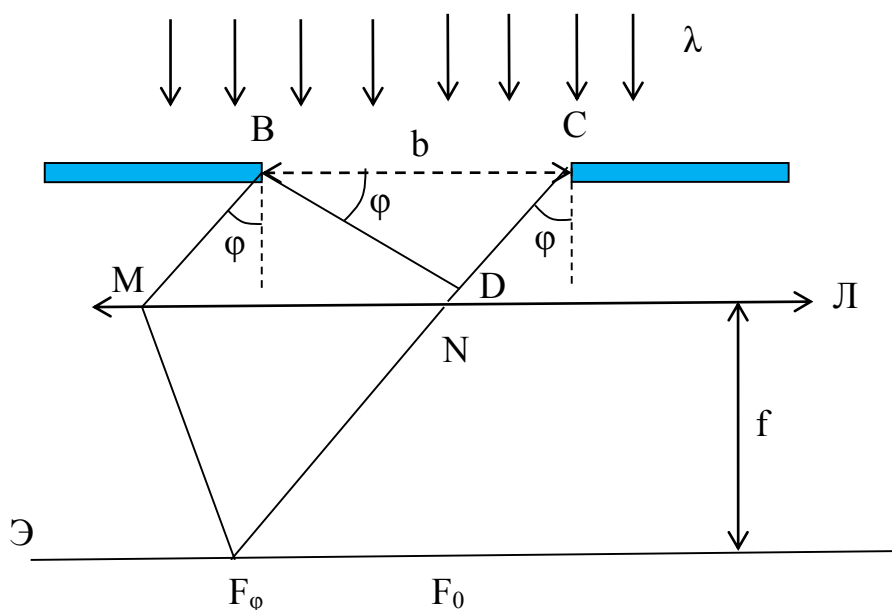


Рис. 1.9 Дифракция света на щели.

Пусть на узкую длинную щель (ширина щели  $BC = b$ ) падает по нормали плоская световая волна с длиной волны  $\lambda$  (Рис. 1.9). Вследствие этого колебания во всех точках щели совершаются в одной фазе. Будем считать, что волна распространяется в вакууме ( $n = 1$ ). За щелью расположена линза (Л) с фокусным расстоянием  $f$ . Дифракционная картина наблюдается на экране (Э), который установлен в фокальной плоскости линзы. На Рис.1.9 показана дифракция световой волны на щели  $BC$ , где  $\varphi$  – угол дифракции, или угол отклонения от прямолинейного распространения падающих волн, который может принимать значения от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ ;  $F_0$  – центр дифракционной картины, где интерферируют лучи, угол дифракции которых равен нулю. В  $F_0$  наблюдается центральный дифракционный максимум. Параллельные лучи  $BM$  и  $CN$ , идущие от краёв щели под углом дифракции  $\varphi$ , собираются линзой в фокальной плоскости линзы (побочный фокус  $F_\varphi$ ).

Рассмотрим лучи  $BM$  и  $CN$ , идущие от краёв щели под углом дифракции  $\varphi$ . Как видно из Рис.1.9, оптическая разность хода волн между этими лучами  $\Delta = CD = b \sin \varphi$ . Разобьём щель на одинаковые зоны в виде полосок, параллельных ребру  $B$ , причём выберем ширину полосок таким образом, чтобы разность хода между лучами из соседних полосок была равна  $\lambda/2$ . Построенные таким образом зоны называются **зонами Френеля**.

Число зон Френеля  $N_\varphi$ , укладывающихся в отверстие под углом  $\varphi$ , равно:

$$N_\varphi = \frac{\Delta}{\lambda/2} = \frac{b \cdot \sin \varphi}{\lambda/2} = \frac{2 \cdot b \cdot \sin \varphi}{\lambda} \quad (1.50)$$

Все зоны излучают свет в рассматриваемом направлении с одинаковой амплитудой, причём колебания, вызываемые в точке  $F_\varphi$  двумя соседними

зонами, противоположны по фазе, т.е. взаимно гасят друг друга. Поэтому, если число зон Френеля в отверстии чётное

$$\frac{2 \cdot b \cdot \sin \varphi}{\lambda} = 2k \quad (1.51)$$

где  $k = 1, 2 \dots$ , то излучение от всех зон взаимно компенсируется и под данным углом дифракции  $\varphi$  наблюдается дифракционный минимум. Из (1.51) получаем условие **дифракционного минимума**:

$$b \sin \varphi = k\lambda \quad (1.52)$$

где  $k = 1, 2 \dots$  порядок дифракционного минимума.

Если число зон Френеля нечётное

$$\frac{2b \sin \varphi}{\lambda} = 2k + 1 \quad (1.53)$$

где  $k = 1, 2 \dots$ , то одна из зон некомпенсирована и под данным углом дифракции  $\varphi$  наблюдается дифракционный максимум, соответственно  $k$  носит название порядок дифракционного максимума. Из (1.53) получаем условие **дифракционного максимума**:

$$b \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (1.54)$$

где  $k = 1, 2 \dots$  порядок дифракционного максимума.

Формулы (1.52) и (1.54) являются базовыми для решения задач по дифракции Фраунгофера на щели.

Распределение интенсивности света на экране при дифракции на щели показано на Рис. 1.10.

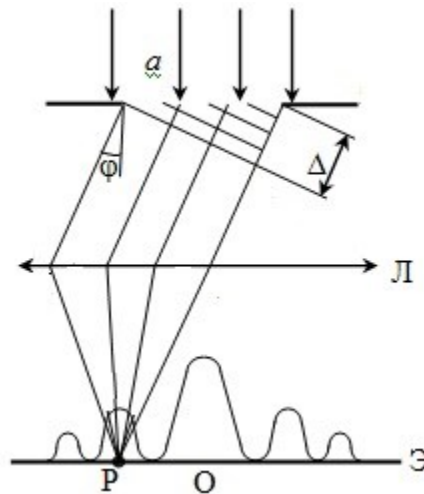


Рис. 1.10 Распределение интенсивности света на экране при дифракции на щели.

### 3.2.2. Дифракция света на одномерной дифракционной решётке

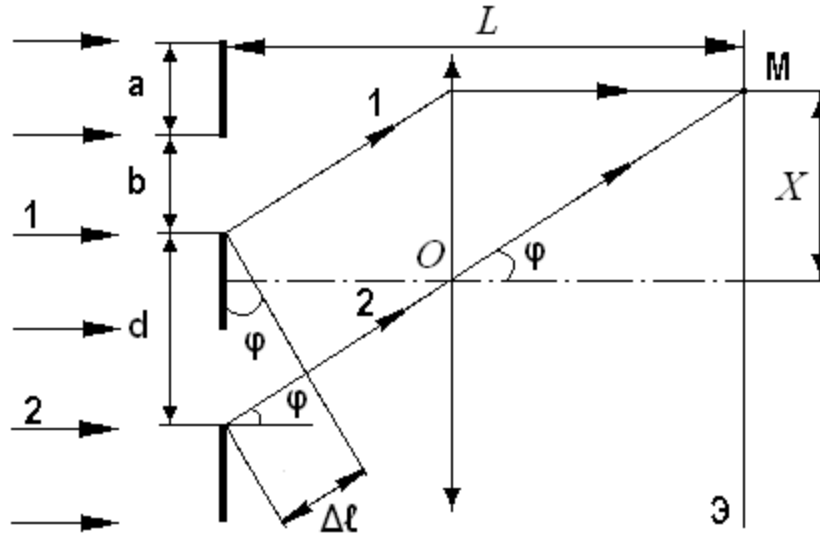


Рис. 1.11 Ход лучей в дифракционной решётке.

Одномерная дифракционная решётка представляет собой систему из большого числа  $N$  одинаковых по ширине и параллельных друг другу щелей в экране, разделённых одинаковыми по ширине непрозрачными промежутками (Рис. 1.11). Пусть  $a$  – ширина непрозрачного промежутка;  $b$  – ширина щели, тогда величина  $d = a + b$ , называется периодом решётки. Обозначим  $l$  – ширину дифракционной решётки, тогда связь между  $l$ ,  $d$  и  $N$  запишется формулой

$$l = N \cdot d \quad (1.55)$$

После дифракционной решётки находится линза, в фокальной плоскости которой находится экран. Следовательно лучи, дифрагировавшие от решётки под углом  $\varphi$ , сойдутся в одной точке на экране. Пусть плоская монохроматическая волна с длиной волны  $\lambda$  падает на решётку по нормали, тогда колебания во всех точках щелей происходят в одинаковой фазе. Будем считать, что световая волна распространяется в вакууме. Выделим лучи 1 и 2, исходящих от двух соседних щелей, разделённых промежутком  $d$  и дифрагировавшие под углом  $\varphi$  (Рис. 1.11). Тогда оптическая разность хода  $\Delta$  между лучами 1,2 будет равна их геометрической разности хода  $\Delta l$ :

$$\Delta = \Delta l = d \sin \varphi \quad (1.56)$$

После прохождения линзы эти лучи сойдутся в точке М на экране. Эти лучи будут усиливать друг друга если на оптической разности между ними укладывается целое число длин волн  $\lambda$  (см. 1.19). Таким образом, мы получаем **условие главных дифракционных максимумов** при дифракции света на решётке:

$$d \sin \varphi = m\lambda \quad (1.57)$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – номер главного дифракционного максимума

На Рис.1.12 показаны распределения интенсивности на экране при дифракции монохроматической волны с длиной волны  $\lambda$ . Видно, что наибольшую интенсивность имеет максимум нулевого порядка ( $m = 0$ ), интенсивность остальных максимумов уменьшается при росте  $m$ .

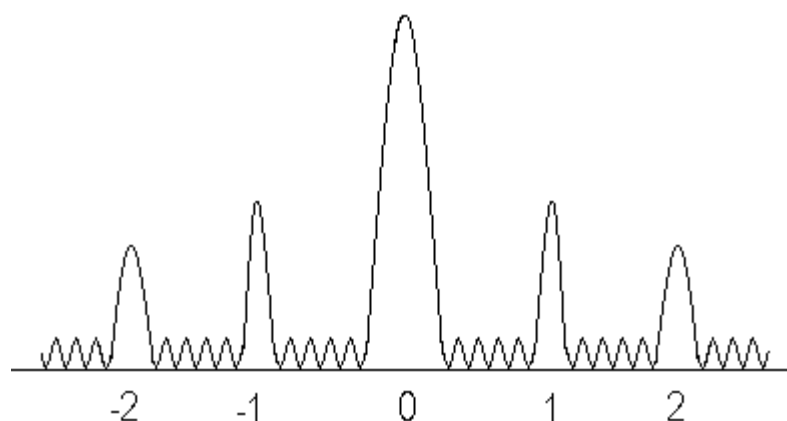


Рис. 1.12 Распределения интенсивности в дифракционном спектре.

### Дифракционная решётка как спектральный прибор

Пусть на дифракционную решётку падает немонахроматический свет с разными длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Условие максимум в спектре  $m$ -ого порядка для длины волны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  запишется в виде

$$d \sin \varphi_1 = m\lambda_1 \quad (1.58)$$

$$d \sin \varphi_2 = m\lambda_2 \quad (1.59)$$

Учтём, что  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , следовательно и  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ . Отсюда следует, что немонахроматический свет после прохождения дифракционной решётки будет разделяться на отдельные спектральные линии, находящихся в разных местах экрана. Таким образом, дифракционная решётка выполняет роль **спектрального прибора** при прохождении через неё немонахроматического света с разными длинами волн.

### Разрешающая способность дифракционной решётки

Разрешающей способностью  $R$  любого спектрального прибора называется выражение

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (1.60)$$

где  $\Delta\lambda$  – минимальная разность длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии воспринимаются раздельно.

Пусть на дифракционную решётку падает немонахроматический свет с длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и пусть разность  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  мала ( $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda$ ), т.е. выполняется условие  $\Delta\lambda \ll \lambda$ .

**Критерий Рэлея** для дифракционной решётки: спектральные линии  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут разрешены на экране, если максимум длины волны  $\lambda_1$  совпадает с первым минимумом длины волны  $\lambda_2$ , а максимум длины волны  $\lambda_2$  совпадает с первым минимумом длины волны  $\lambda_1$ .

Если использовать критерий Рэлея, то можно показать, что спектральные линии  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут разрешены на экране, если разрешающая способность дифракционной решётки  $R$  удовлетворяет соотношению

$$R = mN \quad (1.61)$$

где  $N$  – число щелей в дифракционной решётке;  $m$  – порядок дифракционного максимума.

Формула (1.61) определяет минимальную разрешающую способность для заданных  $\Delta\lambda$  и  $\lambda$ , при больших  $R$  разрешение заведомо будет достигнуто, поэтому критерий разрешения двух спектральных линий можно записать в виде следующего неравенства

$$mN \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (1.61a)$$

Из условия (1.61a) можно записать равенство, которое позволяет вычислить минимальную разность длин волн  $\Delta\lambda$  двух спектральных линий, которые могут быть разрешены данной решёткой с количеством щелей  $N$  в спектре  $m$  – го порядка.

$$mN = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

### 1.3. Поляризация световых волн

**Поляризацией света** называют процесс выделения колебаний одного направления светового вектора из всего многообразия его колебаний. **Естественный свет** – это свет, исходящий от естественных или искусственных источников (лампы накаливания, солнце, свечи, костёр и пр.), в котором световой вектор совершает колебания во всевозможных направлениях с одинаковой интенсивностью. Такой свет называется **неполяризованным**. Существуют специальные приборы, которые позволяют выделить из неполяризованного света такую световую волну, в которой световой вектор совершает колебания только в одном строго заданном направлении. Такие приборы называются **поляризаторами**.

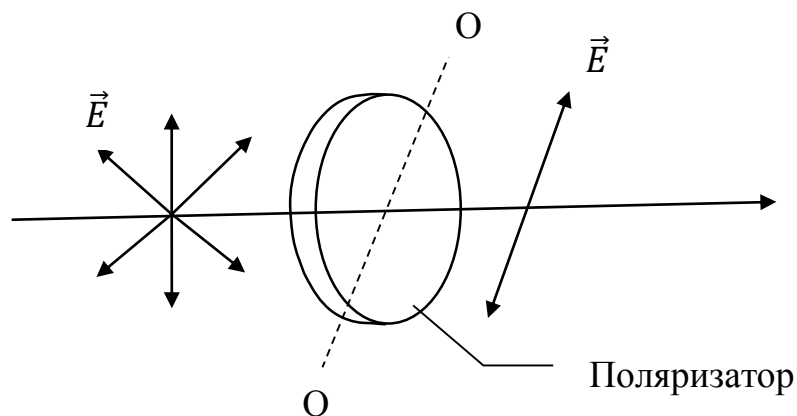


Рис. 1.13 Получение линейно поляризованной световой волны из неполяризованного света.

В поляризаторе можно выделить направление ОО, вдоль которого будет колебаться световой вектор волны, прошедшей через поляризатор (Рис. 1.13). Это направление ОО называется **оптической осью поляризатора**. Плоскость, проведённая через оптическую ось ОО и луч, выходящий из поляризатора, называется **плоскостью поляризации** или **плоскостью колебаний**. Таким образом, световой вектор в световой волне, выходящей из поляризатора, будет колебаться параллельно плоскости поляризации. Такая световая волна называется линейно поляризованная или плоско поляризованная волна. Световые векторы, перпендикулярные плоскости поляризации, поглощаются поляризатором. В качестве поляризатора используют: 1) пластинки, вырезанные из природных кристаллов (турмалин, исландский шпат и др.); 2) плёнка поляроид (представляет из себя пластиковую плёнку с вкрапленными в неё кристаллами герапатита).

В волновой оптике выделяют несколько типов поляризации: 1) линейно поляризованная волна; 2) частично поляризованная волна – это волна, в которой колебания одного направления преобладают над колебаниями другого направления; 3) эллиптически поляризованная волна – это волна, в которой световой вектор вращается по эллипсу вокруг направления светового луча; 4) циркулярно поляризованная волна – это волна, в которой световой вектор вращается по окружности вокруг направления светового луча.

### **Степень поляризации световой волны.**

Пропустим частично поляризованную волну через поляризатор (Рис. 1.14). Если начать вращать поляризатор относительно оси, проходящей через световой луч, то интенсивность света на выходе из поляризатора будет меняться от  $I_{max}$  до  $I_{min}$ . Интенсивность будет максимальна ( $I_{max}$ ), когда оптическая ось ОО будет параллельна максимальному световому вектору  $E_{max}$  во входящей световой волне, интенсивность будет минимальна ( $I_{min}$ ), когда оптическая ось ОО будет перпендикулярна максимальному световому вектору  $E_{max}$  и параллельна минимальному  $E_{min}$ . Степенью поляризации световой волны называется выражение:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (1.62)$$

Из (1.62) следуют частные случаи: 1) линейно поляризованная волна ( $I_{max} \neq 0$ ;  $I_{min} = 0$ );  $P = 1$ ; 2) естественный свет ( $I_{max} = I_{min}$ );  $P = 0$ . В случае частично поляризованного света  $0 < P < 1$ .

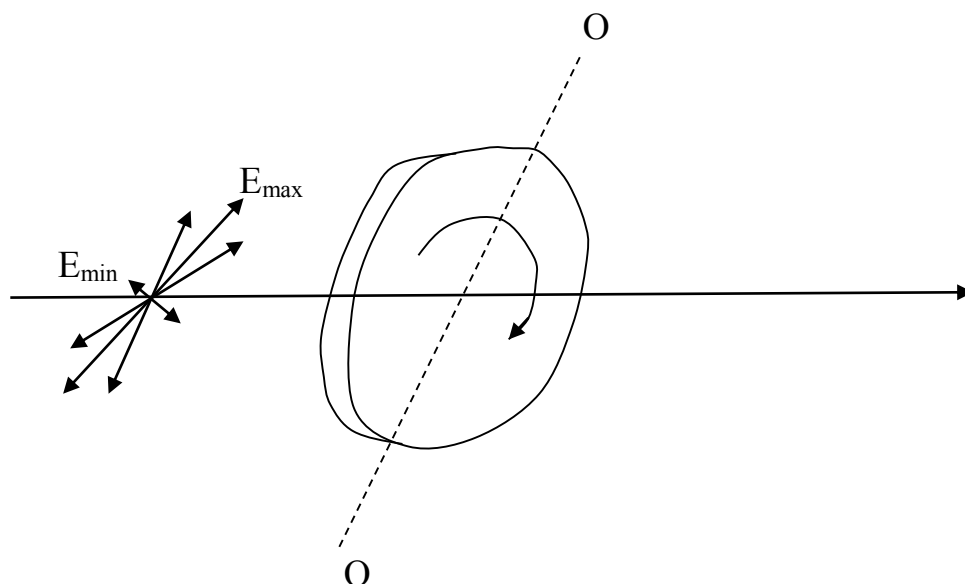


Рис. 1.14 Прохождение частично поляризованной волны через поляризатор.

### Закон Малюса

Пропустим естественный свет с интенсивностью  $I_e$  через систему двух поляризаторов (Рис. 1.15). Первый поляризатор обозначим П (поляризатор), второй А (анализатор). Оба поляризатора параллельны друг другу, однако оптическая ось анализатора А повёрнута относительно оптической оси поляризатора П на угол  $\varphi$ .

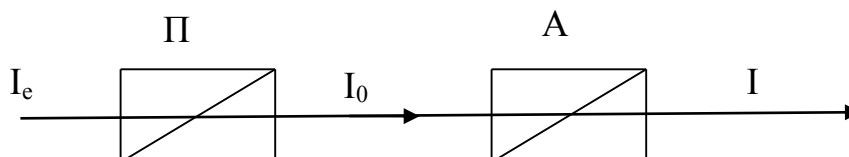


Рис. 1.15 П – поляризатор, А – анализатор,  $I_e$  – интенсивность света естественной компоненты,  $I_0$  – интенсивность света, выходящего из поляризатора,  $I$  – интенсивность света, выходящего из анализатора.

Естественный свет после прохождения поляризатора (П) становится плоско поляризованным с интенсивностью  $I_0$ , после прохождения анализатора (А) интенсивность света становится  $I$ . Таким образом, на вход анализатора падает плоско поляризованная световая волна, плоскость поляризации которой составляет угол  $\varphi$  с плоскостью колебаний анализатора. Интенсивность света  $I$  на выходе из анализатора определяется по закону Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi \quad (1.63)$$

В (1.63) мы не учли, что часть интенсивности световой волны может теряться в результате поглощения. Пусть  $k$  – коэффициент поглощения анализатора, который учитывает эти потери, тогда закон Малюса запишется в виде:

$$I = I_0(1 - k) \cos^2 \varphi \quad (1.64)$$

Приведённая формула показывает степень ослабления поляризованного света до и после анализатора. А как связаны интенсивность исходного естественного света  $I_e$  до поляризатора и интенсивность поляризованного света  $I_0$  после него? Поскольку поляризатор из двух равноправных проекций светового вектора одну поглощает полностью, а вторую пропускает с коэффициентом поглощения  $k$ , то можно записать

$$I_0 = \frac{1}{2}(1 - k)I_e \quad (1.65)$$

### Поляризация света при отражении от диэлектрика. Закон Брюстера

Пусть естественный свет  $I_e$  падает на границу раздела двух диэлектриков с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  (Рис.1.16).

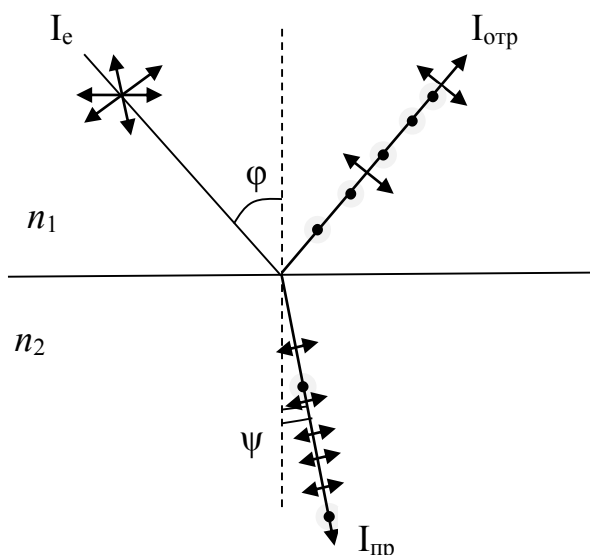


Рис. 1.16 Поляризация света при отражении от диэлектрика.

Брюстер показал, что если угол падения  $\varphi \neq 0$ , то отражённый  $I_{отр}$  и преломлённый  $I_{пр}$  лучи будут частично поляризованными. В отражённом луче будут преобладать колебания, перпендикулярные плоскости падения (черные точки, Рис. 1.16), в преломлённом луче – параллельные плоскости падения (стрелки, Рис. 1.16). При определённом угле падения, который носит название **угол Брюстера** ( $\varphi_{бр}$ ), отражённый луч будет полностью поляризованным, остаются только колебания перпендикулярные плоскости падения, степень поляризации луча  $P = 1$ . Степень поляризации преломлённого луча при  $\varphi = \varphi_{бр}$  будет

максимальна, но этот луч остаётся частично поляризованными  $P < 1$ . Угол Брюстера определяется соотношением

$$\tan \varphi_{\text{бр}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.66)$$

где  $n_1$  – показатель преломления среды падающего луча;  $n_2$  – показатель преломления среды преломлённого луча. При падении луча под углом Брюстера угол между отражённым и преломлённым лучами равен  $\frac{\pi}{2}$  и имеет место соотношение:

$$\varphi_{\text{бр}} + \psi = \frac{\pi}{2}.$$

### Двойное лучепреломление в кристаллах. Получение эллиптически поляризованной световой волны.

При обычных условиях газообразные, жидкие и аморфные диэлектрики являются оптически изотропными средами. Однако в природе существуют кристаллические диэлектрики, которые обладают оптической анизотропией. Это означает, что абсолютные показатели преломления в таких кристаллах будут различными по разным направлениям. Для такого рода кристаллов возникает явление, которое получило название **двойное лучепреломление**.

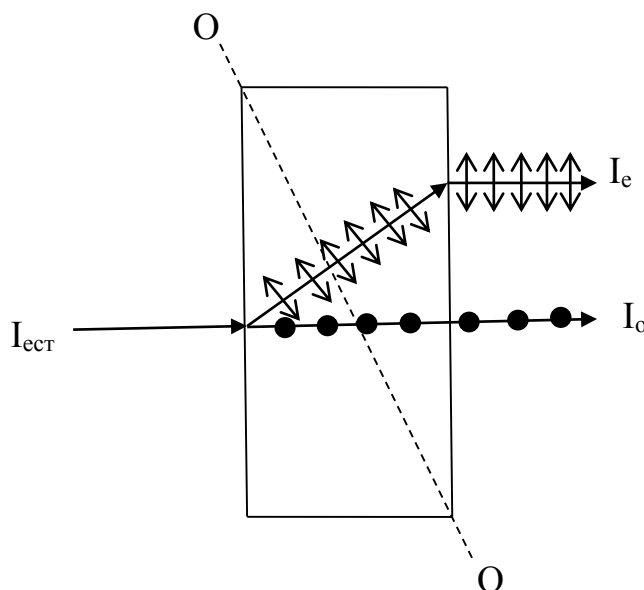


Рис. 1.17 Явление двойного лучепреломления в кристаллах.

Это явление показано на Рис. 1.17. На поверхность кристалла падает естественный свет  $I_{\text{ест}}$ , который разделяется на два луча: обыкновенный луч  $I_o$  и необыкновенный луч  $I_e$ . Это происходит потому, что показатели преломления для данных лучей различны. Пусть  $n_o$  – показатель преломления обыкновенного луча;  $n_e$  – показатель преломления необыкновенного луча, таким образом:

$$n_o \neq n_e \quad (1.67)$$

В кристалле можно выделить оптическую ось ОО. Оптической осью кристалла называется направление, вдоль которого световой луч распространяется, не испытывая двойного лучепреломления. Оптическая ось не является особой прямой линией в кристалле, она лишь характеризует избранное направление в кристалле и может быть проведена через любую точку кристалла. Природные кристаллы бывают двух типов: а) одноосные – имеют одну оптическую ось (исландский шпат, кварц, турмалин); б) двуосные – имеют две оптические оси (гипс, слюда, топаз). В дальнейшем мы будем рассматривать только одноосные кристаллы. Введём понятие главной плоскости одноосного кристалла, это плоскость проходящая через падающий луч  $I_{\text{ест}}$  и оптическую ось ОО.

Различаясь по показателям преломления, лучи  $I_o$  и  $I_e$  имеют различную поляризацию. Они оба линейно поляризованы, но по различным направлениям. Световой вектор в обыкновенном луче  $I_o$  направлен перпендикулярно главной плоскости (черные точки, Рис. 1.17), а в необыкновенном луче  $I_e$  параллельно главной плоскости (стрелки, Рис. 1.17). Отметим особенности этих лучей. Обыкновенный луч  $I_o$  подчиняется всем законам геометрической оптики. Что касается необыкновенного луча  $I_e$ , то он не подчиняется закону преломления света, а в случае нормального падения на кристалл он не преломляется только в двух случаях: а) если световой луч распространяется вдоль оптической оси; б) если световой луч распространяется перпендикулярно оптической оси.

Рассмотрим случай, когда оптическая ось ОО параллельна грани кристалла, а луч  $I_{\text{ест}}$  падает по нормали на поверхность кристалла (Рис. 1.18). В этом случае световой луч распространяется перпендикулярно оптической оси и пространственного разделения обыкновенного и необыкновенного луча не происходит, но поскольку  $n_o \neq n_e$ , то оптическая длина пути каждого из лучей будет различна, следовательно, возникнет оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами.

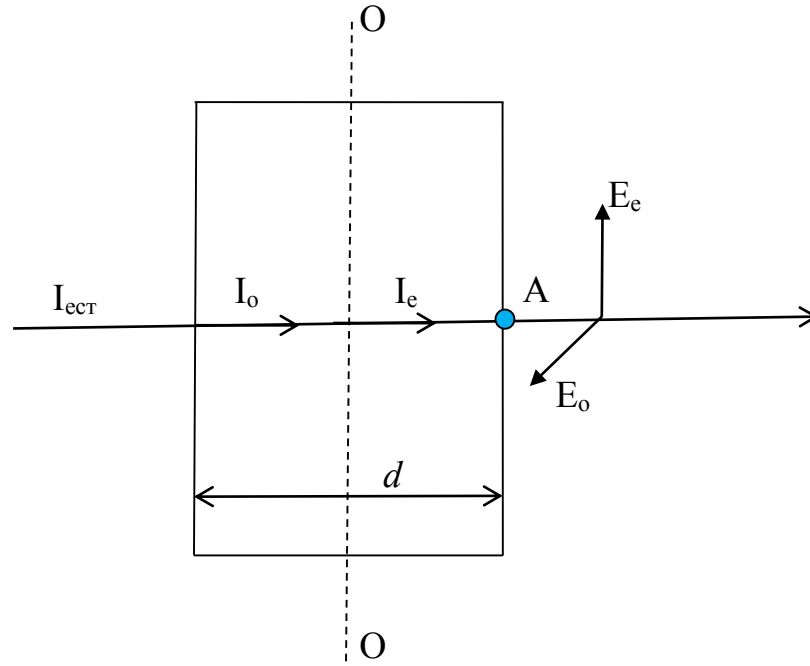


Рис. 1.18 Получение эллиптически поляризованной волны при двойном лучепреломлении.

Оптическая разность хода на выходе из кристалла (точка А) между обыкновенным и необыкновенным лучами определится соотношением

$$\Delta = L_o - L_e = n_o d - n_e d = d(n_o - n_e) \quad (1.68)$$

где  $d$  – геометрический путь каждого из лучей в кристалле.

Поскольку обыкновенный и необыкновенный лучи поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях, то в точке А происходит сложение двух взаимно перпендикулярных векторов  $E_o$  и  $E_e$  (Рис. 1.18). Следовательно, чтобы определить направление результирующего светового вектора мы должны использовать уравнение для сложения взаимно перпендикулярных колебаний. Запишем это уравнение в общем виде

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \Delta\Phi = \sin^2 \Delta\Phi \quad (1.69)$$

где  $x, y$  – взаимно перпендикулярные оси вдоль которых совершаются колебания;  $A, B$  – амплитуды колебаний соответственно вдоль оси  $x$  и  $y$ ;  $\Delta\Phi$  – разность фаз между колебаниями  $x$  и  $y$ .

Выберем ось  $x$  вдоль которой совершается колебание светового вектора обыкновенного луча  $E_{ox}$ , а ось  $y$  вдоль которой совершается колебание необыкновенного луча  $E_{ey}$ , соответственно амплитуды колебаний обозначим  $E_o$  и  $E_e$ . Разность фаз между лучами в волновой оптике рассчитывается по формуле

$$\Delta\Phi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_o - n_e) \quad (1.70)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $\Delta$  – разность хода между лучами. Тогда уравнение (1.69) запишется в виде:

$$\frac{E_{ox}^2}{E_o} + \frac{E_{ey}^2}{E_e} - 2 \frac{E_{ox} E_{ey}}{E_o E_e} \cos \Delta\Phi = \sin^2 \Delta\Phi \quad (1.71)$$

В аналитической геометрии доказывается, что уравнение (1.71) – это уравнение эллипса. Таким образом, свет на выходе из одноосного кристалла для нашего примера в общем случае оказывается **эллиптически поляризованным**. Подбирая соответствующим образом толщину кристалла  $d$  и соотношение между амплитудами  $E_o$  и  $E_e$ , можно получить циркулярно поляризованную либо плоско поляризованную световые волны. Конкретный расчёт на тип поляризации в одноосном кристалле приведён в разделе «Примеры решения задач на поляризацию» (пр.2).

## Примеры решения задач на интерференцию

### Пример 1

В опыте Юнга при расстоянии  $L_1$  от источников до экрана шестая светлая полоса (интерференционный максимум  $m_1 = 6$ ) занимает положение  $y_1$  от центра экрана. Во сколько раз нужно изменить расстояние от источников до экрана, чтобы четвертая темная полоса (интерференционный минимум  $m_2 = 4$ ) оказалась на том же расстоянии от центра экрана, что и шестая светлая полоса в предыдущем рассмотрении. Опыт проводится в вакууме.

**Дано:**

$$m_1 = 6 \text{ (max)}$$

$$m_2 = 4 \text{ (min)}$$

$$y_2 = y_1$$

$$n = 1$$

---

**Найти:**

$$\frac{L_2}{L_1} - ?$$

**Решение:**

Введём обозначения  $L$  – расстояние от когерентных источников в опыте Юнга до экрана;

$m$  – номер полосы;

$y$  – расстояние от центра экрана до центра наблюдаемой полосы;

$d$  – расстояние между источниками;

$\lambda$  – длина волны излучения.

Из теории (1.26) следует, для световых полос положение максимумов

$$y_{max} = m \frac{L\lambda}{d}, \quad (1)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$  – номер световой полосы.

Для темных полос выбираем формулу (1.27), так как номер минимума соответствует номеру темной полосы:

$$y_{min} = (2m - 1) \frac{L\lambda}{2d}, \quad (2)$$

где  $m = 1, 2, \dots$  здесь  $m$  – номер темной полосы. Отсчет производится от центра экрана (Рис. 1.3). По условию

$$m_1 = 6 \text{ (светлая полоса)}, m_2 = 4 \text{ (темная полоса)}$$

Следовательно положение  $m_1$  максимума:

$$y_1 = \frac{m_1 L_1 \lambda}{d}, \quad (3)$$

Запишем положение  $m_2$  минимума:

$$y_2 = (2m_2 - 1) \frac{L_2 \lambda}{2d} \quad (4)$$

По условию задачи  $y_2 = y_1$ , приравниваем (3) и (4):

$$\frac{m_1 L_1 \lambda}{d} = (2m_2 - 1) \frac{L_2 \lambda}{2d} \quad (5)$$

Из (5) выражаем  $\frac{L_2}{L_1}$

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{2m_1}{2m_2 - 1} = \frac{2 \cdot 6}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{12}{7} = 1,71$$

$$\text{Ответ: } \frac{L_2}{L_1} = 1,71$$

## Пример 2

При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете (Рис.1.6) рассматривается кольцо радиусом 5.3 мм. Радиус кривизны линзы равен 18 м, длина волны света 450 нм. Между пластинкой и линзой воздух ( $n \approx 1$ ). Определить, какое это кольцо (темное или светлое) и номер кольца. Каким станет радиус этого же кольца, если в зазор между пластинкой и линзой налить жидкость с показателем преломления  $n = 1,22$  ?

**Дано:**

$$r_m = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$R = 18 \text{ м}$$

$$\lambda = 450 \text{ нм}$$

$$n = 1,22$$

---

**Найти:**

$\max$  или  $\min$  ?  $m$  – ?

$r_m^*$  – ?

**Решение:**

1) Предположим, что наблюдаемое кольцо темное, т.е. выполняется условие минимума. Тогда радиус кольца определится по формуле (1.49):

$$r_m = \sqrt{m R \lambda}, \quad (1)$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$  – номер темного кольца (обязательно целое число).

Из (1) выразим  $m$ :

$$m = \frac{r_m^2}{R \lambda}, \quad m = \frac{(5,3 \cdot 10^{-3})^2}{18 \cdot 450 \cdot 10^{-9}} \approx 3,5 \quad (2)$$

Полученное значение  $m$  не является целым числом, значит, рассматриваемое кольцо не может быть темным.

Радиус светлого кольца определим по формуле (1.47):

$$r_m = \sqrt{(2m - 1) R \frac{\lambda}{2}}. \quad (3)$$

Из (3) выразим номер кольца:

$$m = \left( \frac{2r^2}{R \lambda} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = \left( \frac{(5,3 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2}{18 \cdot 450 \cdot 10^{-9}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \approx 4 \quad (4)$$

Ответ: наблюдается четвертое светлое кольцо.

Если в зазор между пластинкой и линзой налить жидкость с показателем преломления  $n$ , то радиус заданного светлого кольца  $r_m^*$  определяется по формуле:

$$r_m^* = \sqrt{\frac{(2m-1)\lambda R}{2n}} = r_m \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}. \quad (5)$$

где  $r_m$  – радиус светлого кольца без учета жидкости.

Подставляем численные значения

$$r_4^* = 5.3 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{1}{1.22}} = 4.8 \cdot 10^{-3} (м). \quad (7)$$

Ответ: наблюдается четвертое светлое кольцо ;  $r_4^* = 4.8 \cdot 10^{-3} м$ .

### Примеры решения задач на дифракцию

#### Пример 1

Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны 600 нм нормально падает на узкую щель. Дифракционная картина наблюдается на экране с помощью линзы с оптической силой 2 Дптр (Рис. 1.19). На каком расстоянии друг от друга расположены середины максимумов первого и второго порядка, если ширина щели  $a$  равна 50 мкм?

**Дано:**

$$\lambda = 600 \text{ нм} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$D = 2 \text{ Дптр}$$

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = 2$$

$$a = 50 \text{ мкм} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

---

**Найти:**

$$\Delta x - ?$$

**Решение:**

Обозначим расстояние от центра экрана до середины дифракционного максимума  $x$ . Тогда нужно найти  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Из Рис. 1.19 видно, что расстояние  $x$  можно найти как катет прямоугольного треугольника, вторым катетом которого является фокусное расстояние линзы

$$x = F \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол дифракции;  $F$  – фокусное расстояние.

Поскольку углы дифракции первого и второго порядка достаточно малые, то можно принять, что  $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$

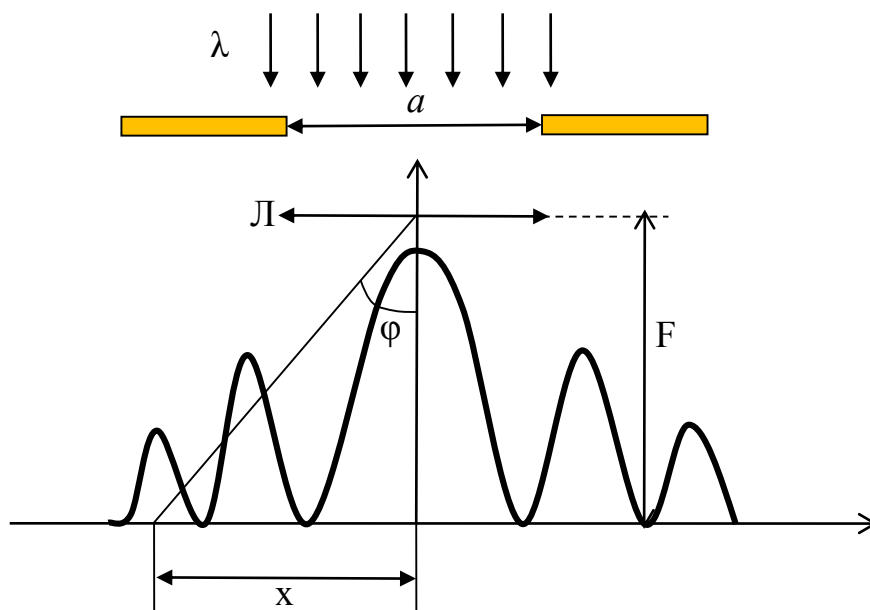


Рис. 1.19 Дифракция света на щели.

Синус угла дифракции определим из условия наблюдения максимума (1.54):

$$a \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$$

$$\sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2a}$$

Фокусное расстояние линзы определим из ее оптической силы:

$$F = \frac{1}{D}$$

Определим положение каждого максимума

$$x = \frac{1}{D} \cdot (2m + 1) \frac{\lambda}{2a}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot (4 + 1) \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot (2 + 1) \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Искомое расстояние

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6 \text{ мм}$$

Ответ: расстояние между максимумами второго и первого порядка равно 6 мм.

### Пример 2

Свет от натриевой лампы, состоящий из двух спектральных линий  $\lambda_1 = 589 \text{ нм}$  и  $\lambda_2 = 589,59 \text{ нм}$ , падает по нормали на дифракционную решётку. Решётка имеет следующие параметры: плотность штрихов  $n = 200 \text{ мм}^{-1}$ , ширина  $l = 3 \text{ мм}$ . После решётки находится линза с фокусным расстоянием  $f = 12 \text{ см}$  для

получения устойчивой дифракционной картины. В каком ближайшем дифракционном порядке  $m$  данные линии будут разрешены? Определить угол дифракции  $\varphi_m$  для данного порядка. Определить расстояние  $x_1$  от центра экрана до спектральной линии  $\lambda_1$  для данного порядка. Определить предельный номер дифракционного максимума  $m_{\text{пр}}$ , который мы будем видеть на экране и угол дифракции  $\varphi_{\text{пр}}$  последнего максимума.

**Дано:**

$$\lambda_1 = 589 \text{ нм};$$

$$\lambda_2 = 589,59 \text{ нм}$$

$$n = 200 \text{ мм}^{-1}, l = 3 \text{ мм}.$$

$$f = 12 \text{ см}$$

---

**Найти:**

$$m - ? \quad \varphi_m - ? \quad x_1(\lambda_1) - ?$$

$$m_{\text{пр}} - ? \quad \varphi_{\text{пр}} - ?$$

**Решение:**

Рассчитаем период дифракционной решётки  $d$ , для этого воспользуемся формулой (1.55), в данном случае  $l = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$ ;  $N = n = 200 \text{ мм}^{-1}$ :

$$d = \frac{l}{N} = \frac{10^{-3}}{200} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м} \quad (1)$$

Опять воспользуемся формулой (1.55), но теперь мы определим число щелей  $N$  на ширине решётки  $l = 3 \text{ мм}$

$$N = \frac{l}{d} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}} = 600 \quad (2)$$

Определим для данной задачи  $\lambda$ ,  $\Delta\lambda$ . Поскольку  $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx 589 \text{ нм}$ , то в качестве  $\lambda$  уместно взять  $589 \text{ нм}$ ;  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 0.59 \text{ нм}$ . Воспользуемся (1.61а) и рассчитаем в каком дифракционном порядке  $m$  данные линии будут разрешены

$$m \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda N} = \frac{589}{0.59 \cdot 600} = 1.66 \quad (3)$$

Поскольку  $m$  обязательно целое, то берём ближайшее целое, удовлетворяющее (3), это 2, таким образом  $m = 2$ . Угол  $\varphi_m$  определим из условия главных дифракционных максимумов (1.57):

$$d \sin \varphi = m\lambda; \quad \sin \varphi = \frac{m\lambda}{d} = \frac{2 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}} = 0.2356; \quad \varphi_m = 13,6^\circ \quad (4)$$

Воспользуемся Рис.1.19, только теперь вместо щели располагается дифракционная решётка, а на экране мы видим расположение главных дифракционных максимумов. Из рисунка видно, что расстояние  $x$  можно найти как катет прямоугольного треугольника, вторым катетом которого является фокусное расстояние линзы

$$x = f \cdot \operatorname{tg} \varphi \quad (5)$$

где  $\varphi$  – угол дифракции.

$$x_1 = f \cdot \operatorname{tg} \varphi_m = 12 \cdot \operatorname{tg} 13,6^\circ = 2.9 \text{ см} \quad (6)$$

Определим  $m_{np}$  – предельный номер дифракционного максимума, который мы будем видеть на экране. Для этого опять воспользуемся формулой (1.57), выразив отсюда  $\sin \varphi$

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d} \quad (7)$$

Синус всегда меньше 1, следовательно, правая часть в (7) также меньше 1

$$\frac{m\lambda}{d} \leq 1 \text{ или } m \leq \frac{d}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{589 \cdot 10^{-9}} = 8.48 \quad (8)$$

Поскольку  $m$  обязательно целое, то максимальное целое это 8, следовательно  $m_{np} = 8$ . Угол для предельного дифракционного максимума  $\varphi_{np}$  определим из (7)

$$\sin \varphi_{np} = \frac{m_{np}\lambda}{d} = \frac{8 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}} = 0.9424; \varphi_{np} = 70.46^\circ$$

**Ответ:**  $m = 2$ ;  $\varphi_m = 13,6^\circ$ ;  $x_1 = 2.9 \text{ см}$ ;  $m_{np} = 8$ ;  $\varphi_{np} = 70.46^\circ$

### Примеры решения задач на поляризацию

#### **Пример 1.**

Естественный свет силой  $I_e$  падает по нормали на поляризатор и анализатор (Рис. 1.20). Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора составляет  $\alpha = 30^\circ$ , а поглощение светового пучка в каждом из них составляет 10%. После прохождения системы поляризатор – анализатор, световой пучок падает по нормали на зеркало и, отразившись, вновь проходит через систему анализатор – поляризатор в обратном направлении. Определить, сколько процентов составит сила света, вышедшего из анализатора  $I_3$ , от силы света на входе в поляризатор  $I_e$ .

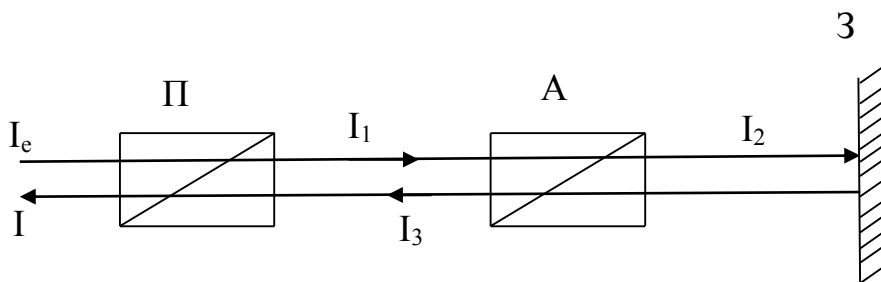


Рис. 1.20 П – поляризатор, А – анализатор, З – зеркало,  $I_e$  – интенсивность света на входе в поляризатор,  $I_1$  – интенсивность света после прохождения поляризатора,  $I_2$  – интенсивность света, падающего на зеркало,  $I_3$  – сила света вышедшего из анализатора после отражения от зеркала,  $I$  – интенсивность света выходящего из поляризатора.

**Дано:**

$$\alpha = 30^\circ, k = 0,1$$

---

**Найти:**

$$\eta = \frac{I_3}{I_e} 100\% - ?$$

**Решение:**

После прохождения естественного света  $I_e$  через поляризатор сила света на выходе из поляризатора рассчитывается по формуле

$$I_1 = \frac{1}{2} I_e (1 - k) \quad (1)$$

Силу света вышедшего  $I_2$  из анализатора рассчитаем по закону Малюса

$$I_2 = I_1 (1 - k) \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} I_e (1 - k)^2 \cos^2 \alpha \quad (2)$$

После отражения от зеркала поляризация света не изменяется, но необходимо учесть, что при прохождении анализатора отражённой волны от зеркала часть световой энергии поглощается анализатором. Поэтому

$$I_3 = I_2 (1 - k) = \frac{1}{2} I_e (1 - k)^3 \cos^2 \alpha \quad (3)$$

Выразим из (3) искомое соотношение  $\eta$ , получим

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{I_3}{I_e} \cdot 100\% = \frac{1}{2} (1 - k)^3 \cos^2 \alpha \cdot 100\% = 0,5 \cdot 0,9^3 \cdot \cos^2 30^\circ \cdot 100\% \\ &= 27,33\% \end{aligned}$$

Ответ:  $\eta = 27,33\%$

**Пример 2.**

Параллельный пучок света с длиной волны  $\lambda = 589$  нм падает по нормали на пластинку из кристалла исландского шпата в четверть длины волны перпендикулярно её оптической оси. Показатели преломления для необыкновенного и обыкновенного лучей составляют соответственно 1,49 и 1,66. Определить: 1) минимальную толщину пластинки  $d_m$ ; 2) уравнение колебаний светового вектора для луча на выходе из пластинки. Обосновать, какой тип поляризации будет наблюдаться у луча на выходе из пластинки.

**Дано:**

$$\lambda = 589 \text{ нм};$$

$$n_o = 1,66; n_e = 1,49$$

---

**Найти:**

1)  $d_m$  —?

2) уравнение колебаний светового вектора —?;

3) тип поляризации —?

### Решение:

Разъяснение. Что означает пластинка в четверть длины волны? Это означает, что пройдя данную пластинку, необыкновенный и обыкновенный лучи приобретут разность хода

$$\Delta = 1/4 \lambda. \quad (1)$$

Аналогично, если пластинка в  $1/2 \lambda$ ;  $3/4 \lambda$ ;  $\lambda$  (половину, три четверти, целую длину волны), то разность хода  $\Delta$  между необыкновенным и обыкновенным лучами составит соответственно  $1/2 \lambda$ ;  $3/4 \lambda$ ;  $\lambda$ .

1) Разность хода  $\Delta$  между лучами рассчитывается по формуле

$$\Delta = L_o - L_e \quad (2)$$

где  $L_o$ ,  $L_e$  – оптическая длина пути соответственно необыкновенного и обыкновенного луча, которая рассчитывается по формуле

$$L = n l_z \quad (3)$$

где  $n$  – абсолютный показатель преломления среды;  $l_z$  – геометрическая длина пути луча. Для нашего случая  $l_z = d_m$ , поэтому получаем

$$L_o = n_o d_m; L_e = n_e d_m; \Delta = L_o - L_e = (n_o - n_e) d_m \quad (4)$$

Учитывая (1), получаем  $1/4 \lambda = (n_o - n_e) d_m$ , отсюда определяем  $d_m$  – минимальную толщину пластинки:

$$d_m = \frac{1/4 \lambda}{(n_o - n_e)} = \frac{0,25 \cdot 589}{1,66 - 1,49} = 866 \text{ нм} = 0,866 \text{ мкм}$$

2) Поскольку лучи распространяются перпендикулярно оптической оси кристалла, то они идут вдоль одного направления и в месте выхода из пластинки складываются между собой. Причём световые вектора в необыкновенном и обыкновенном луче колеблются во взаимно перпендикулярном направлении. Эти колебания складываются, следовательно, мы должны использовать уравнение для сложения взаимно перпендикулярных колебаний. Запишем это уравнение в общем виде

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2 \frac{xy}{AB} \cos \Delta \Phi = \sin^2 \Delta \Phi \quad (5)$$

где  $x, y$  – взаимно перпендикулярные оси вдоль которых совершаются колебания;  $A, B$  – амплитуды колебаний соответственно вдоль оси  $x$  и  $y$ ;  $\Delta \Phi$  – разность фаз между колебаниями  $x$  и  $y$ .

Выберем ось  $x$  вдоль которой совершается колебание светового вектора обыкновенного луча  $E_{ox}$ , а ось  $y$  вдоль которой совершается колебание необыкновенного луча  $E_{ey}$ , соответственно амплитуды колебаний обозначим  $E_o$  и  $E_e$ .

Разность фаз между лучами в волновой оптике рассчитывается по формуле

$$\Delta \Phi = k \Delta \quad (6)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновое число;  $\Delta$  – разность хода между лучами; для пластинки в четверть длины волны она равна  $1/4 \lambda$ . Получаем

$$\Delta \Phi = k \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

Запишем уравнение (5) для нашего случая

$$\frac{E_{ox}^2}{E_o} + \frac{E_{ey}^2}{E_e} - 2 \frac{E_{ox} E_{ey}}{E_o E_e} \cos \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

Учитывая, что  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ , а  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , получаем уравнение колебаний светового вектора для луча на выходе из пластинки:

$$\frac{E_{ox}^2}{E_o^2} + \frac{E_{ey}^2}{E_e^2} = 1 \quad (9)$$

Уравнение (9) есть уравнение эллипса, приведённого к главным осям, поэтому результирующий световой вектор будет вращаться по эллипсу, следовательно, при прохождении пластинки в четверть длины волны мы получим эллиптически поляризованную волну.

Ответ: 1)  $d_m = 0,866$  мкм; 2)  $\frac{E_{ox}^2}{E_o^2} + \frac{E_{ey}^2}{E_e^2} = 1$ ; 3) эллиптически поляризованная волна.

### Пример 3.

Частично поляризованный свет, состоящий из естественной и линейно поляризованных компонент, падает на по нормали на поляризатор коэффициент поглощения которого равен 5% (Рис. 1.21). Известно, что в частично поляризованном свете: 1) сила света  $I_e$  естественной компоненты равна силе света  $I_l$  линейно поляризованной компоненты, а сила света  $I_l$  линейно поляризованной компоненты составляет 100 кд; 2) плоскость колебаний линейно поляризованной компоненты составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  относительно главной плоскости поляризатора. Определите: 1) степень поляризации частично поляризованного света  $P$ ; 2) силу света  $I_1$  после поляризатора.

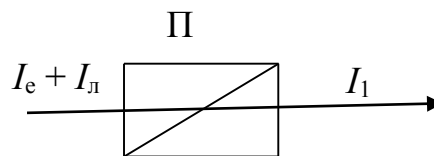


Рис. 1.21 П – поляризатор,  $I_e$  – сила света естественной компоненты,  $I_l$  – сила света линейно поляризованной компоненты,  $I_1$  – сила света, выходящего из поляризатора.

**Дано:**

$$\alpha = 45^\circ,$$

$$k = 0,05;$$

$$I_e = I_l; I_p = 100 \text{ кд}$$

**Найти:**

$$1) P - ?;$$

$$2) I_1 - ?$$

**Решение:**

1) Степень поляризации определяется по формуле

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (1)$$

где  $I_{max}$  – максимальная сила световой волны после прохождения поляризатора;  $I_{min}$  – минимальная сила световой волны после прохождения поляризатора. Чтобы определить  $I_{max}$  установим поляризатор так, чтобы его оптическая ось была параллельно световому вектору линейно поляризованной компоненты, тогда линейно поляризованная компонента  $I_L$  полностью пройдет через поляризатор. Учтём, что естественный свет всегда ослабляется в 2 раза при прохождении поляризатора. Запишем теперь полную силу световой волны  $I_{max}$  при прохождении поляризатора с учётом, что свет частично поглощается в поляризаторе

$$I_{max} = (I_L + \frac{1}{2}I_e)(1 - k) = (I_L + \frac{1}{2}I_L)(1 - k) = \frac{3}{2}I_L(1 - k) \quad (2)$$

Чтобы определить  $I_{min}$  установим поляризатор так, чтобы его оптическая ось была перпендикулярно световому вектору линейно поляризованной компоненты, тогда линейно поляризованная компонента  $I_L$  полностью поглотится поляризатором, а естественный свет ослабится в 2 раза при прохождении поляризатора. Запишем теперь полную силу  $I_{min}$  световой волны при прохождении поляризатора с учётом, что свет частично поглощается в поляризаторе

$$I_{min} = \frac{1}{2}I_e(1 - k) = \frac{1}{2}I_L(1 - k) \quad (3)$$

Подставим (2) и (3) в (1), получим

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{\frac{3}{2}I_L(1-k) - \frac{1}{2}I_L(1-k)}{\frac{3}{2}I_L(1-k) + \frac{1}{2}I_L(1-k)} = 0,5 \quad (4)$$

При расчёте  $I_1$  учтём, что линейно поляризованная и естественная компоненты ослабляются поляризатором по разному. Естественная компонента всегда ослабляется в 2 раза, а при расчёте ослаблении линейно поляризованной компоненты необходимо использовать закон Малюса

$$I = I_0(1 - k)\cos^2\alpha \quad (5)$$

где  $I$  – сила световой волны на выходе из поляризатора;  $I_0$  – сила линейно поляризованной световой волны на входе в поляризатор;  $\alpha$  – угол между плоскостью колебаний линейно поляризованной компоненты и главной плоскостью поляризатора.

Запишем теперь полную силу световой волны при прохождении поляризатора

$$I_1 = I_L(1 - k)\cos^2\alpha + \frac{1}{2}I_e(1 - k) = I_L(\cos^2\alpha + \frac{1}{2})(1 - k) = 100(\cos^2 45^\circ + 0,5)(1 - 0,05) = 95 \text{ кд} \quad (6)$$

Ответ:  $P = 0,5$ ;  $I_1 = 95$  кд.

**Пример 4.**

Сосуд с бензолом закрыт стеклянной (легкий крон) крышкой, представляющей собой плоскопараллельную пластину. Сосуд помещен в спирт этиловый (Рис. 1.22). Луч света, проходящий через спирт, падает на стекло. Каков угол отражения света от стеклянной крышки  $\alpha_{отр}$ , если свет, отраженный от бензола,

является максимально поляризованным? Решение обязательно сопровождать рисунком, на котором показать ход лучей. ( $n_{\text{бензол}} = 1,504$ ,  $n_{\text{стекла}} = 1,52$ ,  $n_{\text{спирт}} = 1,354$ ).

**Дано:**

$$n_{\text{бензол}} = 1,504$$

$$n_{\text{стекла}} = 1,52$$

$$n_{\text{спирт}} = 1,354$$

**Найти:**  $\alpha_{\text{отр}}$  —?

**Решение:**

Ход лучей в различных средах (спирт, стекло, бензол) показан на Рис.1.22.

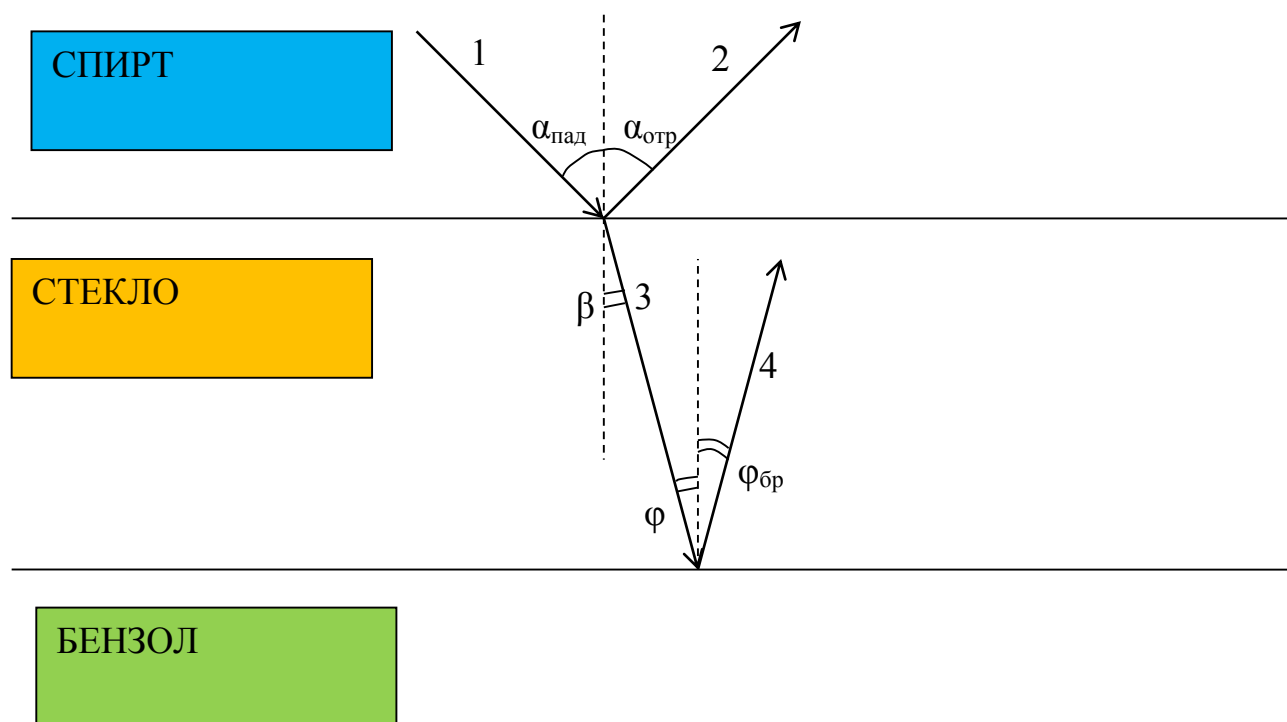


Рис. 1.22 Ход лучей в различных средах: спирт, стекло, бензол.

Рассмотрим ход лучей на границе спирт-стекло. Луч 1, падая на границу раздела спирт-стекло под углом  $\alpha_{\text{пад}}$ , частично отражается (луч 2) под углом  $\alpha_{\text{отр}}$ , частично преломляется в стекле под углом  $\beta$  (луч 3). Нам нужно найти угол отражения луча 2 от стеклянной крышки  $\alpha_{\text{отр}}$ . Используя правило №1 геометрической оптики: **угол падения = углу отражения**, получаем

$$\alpha_{\text{пад}} = \alpha_{\text{отр}} \quad (1)$$

Таким образом, для ответа в данной задаче нам нужно найти  $\alpha_{\text{пад}}$ . Запишем закон преломления света на границе спирт-стекло:

$$\frac{\sin \alpha_{\text{пад}}}{\sin \beta} = \frac{n_{\text{стекл}}}{n_{\text{спирт}}} \quad (2)$$

Из (2) выражаем  $\sin \alpha_{\text{пад}}$

$$\sin \alpha_{\text{пад}} = \frac{n_{\text{стекл}}}{n_{\text{спирт}}} \sin \beta \quad (3)$$

Таким образом, нам предстоит определить  $\sin \beta$ .

Рассмотрим ход лучей в стекле и на границе стекло-бензол. Преломлённый луч 3 под углом  $\varphi$  падает на границу стекло-бензол. Из Рис.1.21 видно, что углы  $\beta$  и  $\varphi$  равны между собой как углы накрест лежащие при параллельных прямых (данные прямые представляют собой нормали к границам раздела сред спирт-стекло и стекло-бензол). Следовательно:

$$\beta = \varphi \quad (4)$$

Ещё раз используем правило №1 геометрической оптики на границе стекло-бензол, получаем:

$$\varphi = \varphi_{\text{бр}} \quad (5)$$

Поскольку луч 4 отраженный от бензола является максимально поляризованным, то  $\varphi_{\text{бр}}$  является углом Брюстера. Используя закон (1.66), получаем:

$$\tan \varphi_{\text{бр}} = \frac{n_{\text{бенз}}}{n_{\text{стекл}}} = \frac{1,504}{1,52} = 0,9894; \quad \varphi_{\text{бр}} = \arctan 0,9894 = 44,7^\circ \quad (6)$$

Учитывая (4) и (5), получаем:

$$\beta = 44,7^\circ \quad (7)$$

Используя (3), получаем:

$$\sin \alpha_{\text{пад}} = \frac{n_{\text{стекл}}}{n_{\text{спирт}}} \sin \beta = \frac{1,52}{1,354} \sin 44,7^\circ = 0,7896; \quad \alpha_{\text{пад}} = \arcsin 0,7896 = 52,2^\circ$$

Учитывая (1), получаем:  $\alpha_{\text{отр}} = 52,2^\circ$ .

Ответ:  $\alpha_{\text{отр}} = 52,2^\circ$ .

## 2. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

### 2.1. Корпускулярно-волновой дуализм

К концу 19 века в науке окончательно утвердилось представление о свете, как об электромагнитных волнах. Однако волновая теория света не в состоянии была объяснить излучение абсолютно черного тела, а также выбивание электронов из металлов под действием света (фотоэлектрический эффект).

Благодаря работам Макса Планка и Альберта Эйнштейна эта проблема была решена. Их можно назвать авторами квантовой теории света. Согласно этой теории, свет представляет собой поток частиц – фотонов (квантов), обладающих энергией и импульсом. При взаимодействии с веществом фотон передает ему энергию и импульс.

Современная наука признает, что свет обладает двойственностью свойств, так называемым корпускулярно – волновым дуализмом. Волновые свойства проявляются при распространении света, а при взаимодействии с веществом – его корпускулярные свойства, т.е. свойства частиц. Строгое научное описание этих свойств дает современная теория – квантовая механика.

### 2.2. Тепловое излучение

Излучением тел называется испускание телами в окружающее пространство электромагнитных волн. Излучение, возникающее за счет внутренней энергии тел, то есть вследствие теплового движения атомов и молекул, входящих в состав излучающего тела, называется тепловым или температурным. Тепловое излучение имеет место при любых температурах тел.

Совокупность длин волн, входящих в состав излучения, называется спектром излучения. Тепловое излучение твердых и жидких тел содержит все длины волн от 0 до  $\infty$ . Поэтому спектр теплового излучения твердых и жидких тел называется сплошным.

Для количественной оценки способности тела испускать свет определенной длины волны  $\lambda$  при некоторой температуре  $T$  вводится физическая величина – излучательная способность  $r_{\lambda,T}$ . Часто эту физическую величину называют спектральной плотностью энергетической светимости. Температура может быть измерена по шкале Цельсия (обозначим её значение как  $t^0$ ) и по шкале Кельвина ( $T$ ). Связь между этими величинами определяется формулой

$$T = t^0 + 273$$

**Излучательной способностью тела** называется количество энергии электромагнитного излучения данной длины волны  $\lambda$ , испускаемое за единицу времени с единицы площади поверхности тела в единичном интервале длин волн при заданной температуре этого тела:

$$r_{\lambda T} = \frac{dW}{dS \cdot dt \cdot d\lambda} \quad (2.1)$$

Количество энергии электромагнитного излучения, испускаемое за единицу времени с единицы площади поверхности тела во всём интервале длин волн от 0 до  $\infty$ , называется энергетической светимостью ( $R$ ).

$$R = \frac{dW}{dS \cdot dt} \quad (2.2)$$

Связь между излучательной способностью и энергетической светимостью описывается соотношением:

$$R = \int_0^\infty r_{\lambda T} d\lambda \quad (2.3)$$

Поглощательная способность тела  $a_{\lambda, T}$  является характеристикой способности тела поглощать энергию падающего на него света.

$$a_{\lambda, T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}}, \quad (2.4)$$

где  $dW_{\text{погл}}$  – энергия, поглощаемая телом;  $dW_{\text{пад}}$  – энергия, падающая на тело.

Поглощательная способность показывает, какая доля энергии света, падающего на единицу площади освещаемой поверхности тела за единицу времени, поглощается телом. Хорошо поглощают свет черные тела: сажа, бархат, черная бумага. Тело, которое при любой не разрушающей его температуре поглощает полностью всю энергию падающего на него света любой длины волны  $\lambda$  или частоты  $\nu$  ( $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме), называют абсолютно черным телом (а.ч.т.). Для абсолютно черного тела поглощательная способность  $a_{\lambda, T} = 1$ . Моделью абсолютно черного тела является небольшое отверстие в ящике сферической формы. Луч света, попадающий внутрь ящика через отверстие, многократно отражается от стенок ящика, испытывая частичное поглощение при каждом отражении. В итоге луч полностью поглощается. Поэтому снаружи отверстие кажется совершенно черным.

Абсолютно черное тело – это абстракция. Максимально близки по оптическим свойствам к абсолютно черному телу сажа и черный бархат.

Если поглощательная способность тела одинакова для всех частот, но зависит от его температуры, материала тела, состояния его поверхности, то такое тело называют серым. У реальных тел  $a_{\lambda, T} < 1$ .

### **Законы излучения абсолютно черного тела.**

Согласно закону Стефана – Больцмана, энергетическая светимость  $R$  абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры

$$R = \sigma T^4 \quad (2.5)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  – постоянная Стефана – Больцмана.

Из закона Стефана – Больцмана следует, что излучаемая абсолютно черными телами энергия определяется только их температурой.

Энергетическая светимость  $R$  реального тела не может быть больше энергетической светимости абсолютно черного тела. Для реальных тел коэффициент поглощения меньше единицы. В законе Стефана–Больцмана это учитывается коэффициентом черноты  $\alpha_T$  ( $\alpha_T < 1$ ). Тогда для тела, которое не является абсолютно черным, уравнение (2.5) примет вид:

$$R = \alpha_T \sigma T^4. \quad (2.6)$$

Нагреваемое тело состоит из огромного количества атомов. Каждый атом ведет себя подобно вибратору – источнику электромагнитного излучения различной длины волны, следовательно, различной частоты. Решение задачи о распределении энергии излучения а.ч.т. между разными длинами волн, т.е. о спектральном составе излучения, сыграло огромную роль в развитии основных идей современной физики. Оно привело к созданию квантовой оптики (в дальнейшем – квантовой физики).

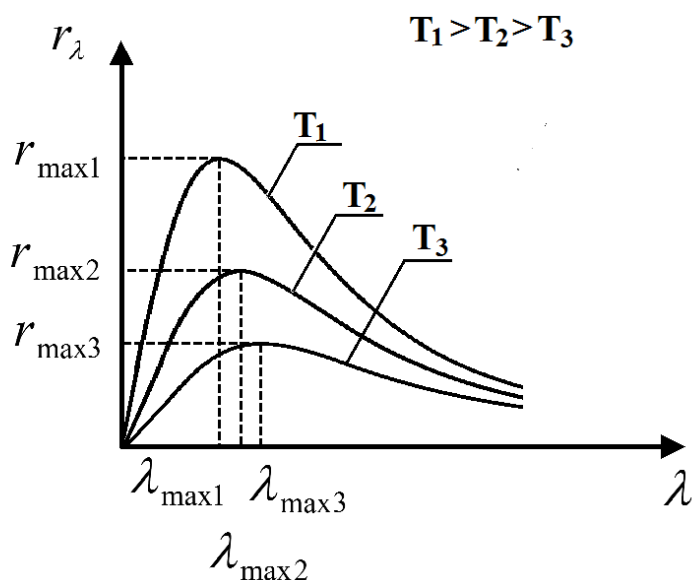


Рис. 2.1 Спектры излучения абсолютно черного тела.

На рис. 2.1 изображены графики распределения интенсивности излучения  $r_{\lambda,T}$  а.ч.т. по длинам волн при различных температурах. Площадь, ограниченная каждой кривой и осью, обозначенной  $\lambda$  (длина волны), определяет полную энергию, испускаемую с единицы площади поверхности а.ч.т. за единицу времени, т.е. энергетическую светимость  $R$ . Все кривые имеют максимумы при некоторых  $\lambda = \lambda_{max}$ . При увеличении температуры максимум графика  $r_{\lambda,T}$  смещается в область более коротких волн, т.е.  $\lambda_{max}$  смещается в сторону меньших значений.

$$\lambda_{max} = \frac{c_1}{T} \quad (2.7)$$

Эта формула математически выражает закон смещения Вина (первый закон Вина): длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности а.ч.т. ( $r_{\lambda_{\max}}$ ) обратно пропорциональна абсолютной температуре этого тела. Для любого а.ч.т. постоянная  $C_1 = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

Этот закон объясняет, почему при понижении температуры нагретого тела изменяется цвет этого тела (например, переход от белого каления к красному из-за смещения  $\lambda_{\max}$  в сторону больших значений).

Второй закон Вина: максимальная излучательная способность абсолютно черного тела  $r_{\lambda_{\max}}$  возрастает пропорционально пятой степени температуры:

$$r_{\lambda_{\max}} = C_2 T^5 \quad (2.8)$$

где  $C_2 = 1,29 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{К}^5}$ ; спектральный состав излучения Солнца очень близок к излучению а.ч.т.

Применение идей классической физики к исследованию теплового излучения а.ч.т. привело к результатам, противоречащим закону сохранения энергии. Выход из возникших трудностей нашел в 1900 г. немецкий физик Макс Планк. Планк высказал гипотезу, согласно которой а.ч.т. испускает и поглощает энергию не непрерывно, а определенными порциями – квантами.

Энергия кванта (в дальнейшем появилось название – фотон) равна:

$$W_{\phi} = h \frac{c}{\lambda} = h\nu = \hbar\omega, \quad (2.9)$$

где  $\lambda$  – длина волны излучения;  $\nu$  – частота излучения;  $h$  – постоянная Планка,  $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ;  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.06 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ;  $\omega$  – циклическая частота излучения,  $\omega = 2\pi\nu$ .

На основании своих идей Планк получил формулу для излучательной способности а.ч.т.:

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (2.10)$$

где  $T$  – абсолютная температура (по шкале Кельвина);  $e \approx 2,72$  – основание натурального логарифма;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$  – постоянная Больцмана.

Соответственно для распределения энергии, излучаемой а.ч.т. по частотам  $\nu$ , можно записать:

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \quad (2.11)$$

Формула Планка точно согласуется с результатами измерений распределения энергии в спектрах излучения а.ч.т. при разных температурах.

Идея Планка о прерывном характере испускания и поглощения света оказала огромное влияние на все дальнейшее развитие физики.

### Пример 1

Энергетическая светимость абсолютно черного тела  $R = 3 \text{ Вт/см}^2$ . Определить длину волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующую максимальной излучательной способности этого тела ( $r_{\max}$ ).

**Дано:**

$$R = 3 \text{ Вт/см}^2 = 3 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2.$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$$

$$C_1 = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$$

---

**Найти:**

$$\lambda_{\max} - ?$$

**Решение:**

По закону Стефана – Больцмана  $R = \sigma \cdot T^4$ , поэтому можно выразить температуру:

$$T = \sqrt[4]{\frac{R}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 10^4}{5,67 \cdot 10^{-8}}} = 850 \text{ К}$$

По закону смещения Вина  $\lambda_{\max} = \frac{C_1}{T}$ , тогда  $\lambda_{\max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-2}}{850} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

Полученное значение  $\lambda_{\max}$  соответствует инфракрасному (тепловому) излучению.

Ответ:  $\lambda_{\max} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ .

### 2.3. Световое давление

Согласно квантовой теории электромагнитного излучения, свет представляет собой распространение в пространстве фотонов, которые ведут себя как поток особых частиц. Поэтому следует считать, что фотон, как всякая движущаяся частица, обладает массой и импульсом.

Эффективную массу фотона можно определить из формулы Эйнштейна:

$$W_{\phi} = m_{\phi} c^2 \quad (2.12)$$

где  $W_{\phi}$  – энергия фотона,  $m_{\phi}$  – масса фотона;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  – скорость света в вакууме.

По теории Планка (2.9)  $W_{\phi} = h \frac{c}{\lambda}$ . Т.к.  $m_{\phi} c^2 = h \frac{c}{\lambda}$ , то масса фотона

$$m_{\phi} = \frac{h}{c \cdot \lambda} \quad (2.13)$$

Импульс фотона

$$P_{\phi} = m_{\phi} c = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \quad (2.14)$$

Следует отметить, что для фотонов невозможно состояние покоя. Поэтому у фотонов не может быть массы покоя, т.е. для фотонов масса покоя  $m_0 = 0$ .

Фотон – это частица электромагнитного поля. Отсутствие массы покоя отличает фотоны от частиц вещества (электронов, протонов), которые могут находиться в состоянии покоя. Масса покоя электрона  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, масса покоя протона  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

Свет, падающий на поверхность тела, оказывает на него давление. Экспериментально световое давление обнаружил и измерил российский ученый П.Н. Лебедев.

Давление света на освещаемую поверхность является результатом того, что при столкновении с поверхностью каждый фотон передает ей свой импульс. Подобно этому, давление газа на стенки сосуда обусловлено передачей импульса молекулами газа поверхности стенки.

Давление численно равно нормальной компоненте силы, действующей на единицу площади, т.е., при нормальном падении света на освещаемую поверхность  $P = \frac{F}{S}$ . Сила, действующая на поверхность, выражается из второго закона Ньютона:

$$F \cdot \Delta t = \Delta P_{\Phi}, \quad (2.15)$$

где  $\Delta t$  – время действия силы,  $\Delta P_{\Phi}$  – изменение импульса всех упавших фотонов. Тогда давление можно записать:

$$P = \frac{\Delta P_{\Phi}}{S \cdot \Delta t}. \quad (2.16)$$

Следовательно, давление будет численно равно тому импульсу, который передали фотоны единице площади освещаемой поверхности за единицу времени.

Пусть  $n$  фотонов падает за единицу времени на единицу площади. Если коэффициент отражения света от освещаемой поверхности равен  $\rho$ , то отражается  $\rho n$  фотонов, а поглощается  $(1 - \rho)n$  фотонов. Импульс фотона вычисляется по формуле (2.14). Каждый отраженный фотон передает поверхности импульс, равный  $P_{\Phi \text{ отр}} = \frac{2h\nu}{c}$ , т.к. при отражении импульс фотона изменяет направление на противоположное. Каждый поглощенный фотон передает поверхности свой импульс однократно  $P_{\Phi \text{ погл}} = \frac{h\nu}{c}$ . Давление света на поверхность будет равно импульсу, который за одну секунду передают все фотоны ( $n$ ).

$$P = \frac{2h\nu}{c} n\rho + \frac{h\nu}{c} (1 - \rho)n,$$

Или

$$P = \frac{nh\nu}{c} (1 + \rho) \quad (2.17)$$

Здесь  $nh\nu = E_{\Phi}$  – энергия всех фотонов, падающих на единицу площади за одну секунду, т.е. интенсивность света. Часто величину  $E_{\Phi}$  называют **энергетической освещенностью**.

Тогда уравнение (2.17) примет вид:

$$P = \frac{E_{\Phi}}{c} (1 + \rho). \quad (2.18)$$

Поскольку  $w = \frac{E_{\Phi}}{c}$  – это объемная плотность энергии излучения, то есть энергия, заключенная в единице объема, то можно записать:

$$P = w(1 + \rho). \quad (2.19)$$

Формула (2.19) полностью согласуется с результатом, полученным Максвеллом в его электромагнитной теории света, и подтверждена опытом.

Следует помнить, что давление создается только нормальной (перпендикулярной) к поверхности составляющей силы, т.е. нормальной составляющей импульса фотона.

Рис. 2.2 поясняет случай, когда угол падения света на освещаемую поверхность  $\alpha \neq 0$ . Здесь  $\vec{n}$  – нормаль к освещаемой поверхности.

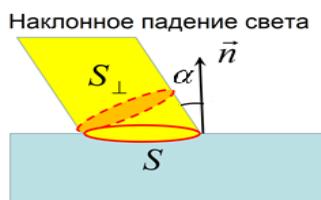


Рис. 2.2 Свет падает под углом  $\alpha$  на освещаемую поверхность.

Нормальная составляющая силы  $F_{\perp} = F \cdot \cos \alpha$ . Пучок света, падающий под углом на поверхность, освещает участок поверхности большей площади, чем этот же пучок света, падающий на поверхность по нормали к ней. Соотношение между освещаемой поверхностью  $S$  и нормальной составляющей этой поверхности  $S_{\perp}$  можно записать уравнением  $S = S_{\perp} / \cos \alpha$ . Это пояснено рис.2.2. Учитывая всё это, окончательная формула расчета давления при наклонном падении света имеет вид:

$$P = \frac{nh\nu}{c} (1 + \rho) \cdot \cos^2 \alpha. \quad (2.20)$$

## 2.4. Внешний фотоэффект

Внешним фотоэлектрическим эффектом (фотоэффектом) называется испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения.

А. Эйнштейн в 1905г. на основе идеи Планка о квантовой природе электромагнитного излучения создал теорию, объясняющую внешний фотоэффект в металлах. Распространение света Эйнштейн рассматривал не как непрерывный волновой процесс, а как поток особых частиц – фотонов, которые движутся со скоростью света  $c$ . Энергия фотона по теории Планка  $W_{\phi} = h\nu$ . При поглощении света фотоны передают всю свою энергию атомам и молекулам вещества, прекращая свое существование. То есть поглощение света, как и его распространение, происходит порциями – квантами.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта имеет вид:

$$h\nu = A + \frac{m \cdot v_{max}^2}{2} \quad (2.21)$$

где  $h$  – постоянная Планка;  $\nu$  – частота излучения;  $h\nu$  – энергия фотона, падающего на поверхность металла (катода);  $A$  – работа выхода электрона из металла.

Она зависит от химической природы вещества, из которого сделан катод, и состояния его поверхности;  $m$  – масса электрона;  $V_{max}$  – максимальная скорость электронов, вылетевших из катода;  $\frac{m \cdot V_{max}^2}{2}$  – максимальная кинетическая энергия, полученная электроном.

Уравнение (2.21) выражает закон сохранения энергии при рассмотрении внешнего фотоэффекта.

При поглощении фотона электроном металла его энергия  $h\nu$  целиком передается электрону. Для выхода из металла электрон должен совершить работу выхода  $A$  для преодоления потенциального барьера на границе металл-вакуум. Это возможно, если энергия  $h\nu \geq A$ . Из уравнения Эйнштейна следует, что максимальная скорость фотоэлектрона зависит от частоты света  $\nu$  (или длины волны  $\lambda$ , т.к.  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ ) и работы выхода  $A$ .

Уравнение (2.21) записано для одного электрона, поскольку поглощение фотона происходит при его взаимодействии с единственным электроном. Значит скорость каждого электрона зависит не от интенсивности, а только от частоты падающего света. Это заключение принято называть **первым законом внешнего фотоэффекта**.

**Второй закон внешнего фотоэффекта:** для каждого вещества существует **красная граница фотоэффекта**, т.е. такая наименьшая частота света  $\nu_0$  (или максимальная длина волны  $\lambda_0$ ), при которой еще возможен фотоэффект. Ее значение определяется работой выхода  $A$  для данного материала.

На красной границе фотоэффекта энергия фотона  $h\nu_0 = A$  (при этом  $V_{max} = 0$ ). Тогда получим для красной границы фотоэффекта соотношение

$$\nu_0 = \frac{A}{h} \text{ или } \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = \frac{ch}{A} \quad (2.22)$$

**Третий закон внешнего фотоэффекта.** Число электронов, вырываемых из катода за единицу времени, определяется световым потоком, падающим на катод. Если все фотоэлектроны, выбитые из катода, попадают на анод, то при повышении напряжения фототок дальше расти не может. Максимально возможный ток называется **током насыщения**  $I_n$ . В соответствии с третьим законом фотоэффекта ток насыщения  $I_n$  прямо пропорционален падающему световому потоку:

$$I_n \sim \Phi \quad (2.22a)$$

Этот закон называется по имени российского ученого – закон Столетова А.Г.

### Экспериментальное изучение внешнего фотоэффекта.

Все рассмотренные законы внешнего фотоэффекта подтверждаются опытным путем. На Рис. 2.3 изображена схема установки для изучения законов внешнего фотоэффекта.

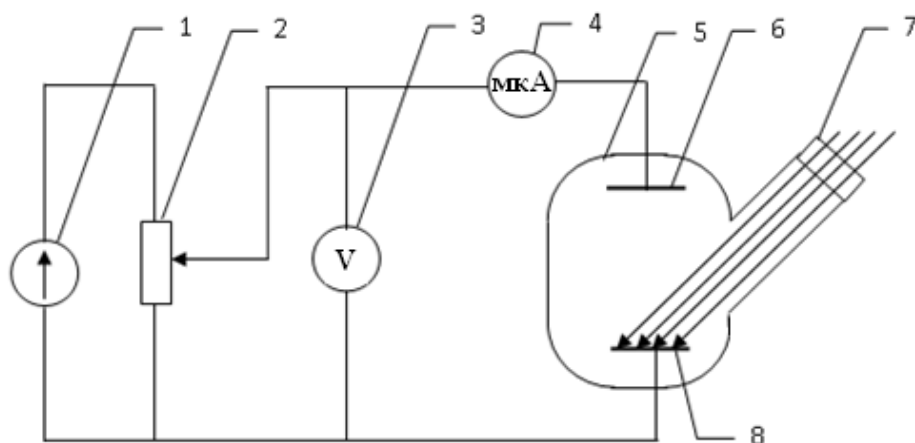


Рис. 2.3 Схема установки для изучения законов внешнего фотоэффекта.

Исследуемый металл нанесен на пластину (8), называемую катодом. Анод (6) и катод помещены в баллон (5), в котором создан вакуум. Через специальное окно (7) свет попадает на катод. В целом это устройство называется фотоэлементом. Напряжение между катодом и анодом фотоэлемента измеряется вольтметром (3) и регулируется потенциометром (2). Фототок измеряется гальванометром (4), обозначенным на рис. 2.2 – микроамперметр (мкА).

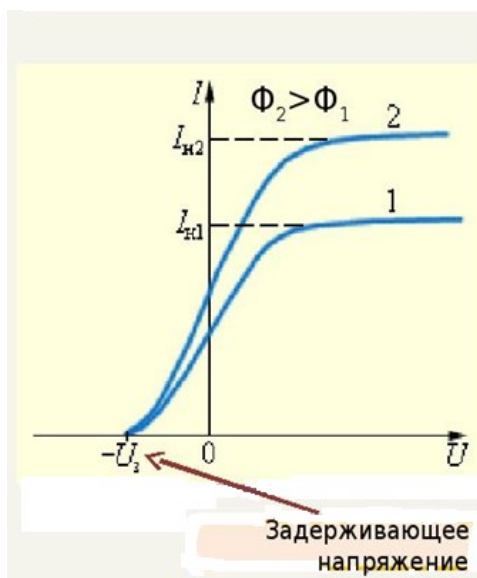


Рис. 2.4 Зависимость силы фототока от анодного напряжения.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [https://myslide.ru/documents\\_3/aef4754315a6452376495bae6b055641/img24.jpg](https://myslide.ru/documents_3/aef4754315a6452376495bae6b055641/img24.jpg) - для ВАХ 1

Зависимость, изображенная на рис. 2.4, называется вольт-амперная характеристика фотоэлемента (ВАХ). Проведем анализ этой характеристики.

Если увеличивать напряжение между катодом и анодом (анодное напряжение) при определенном постоянном световом потоке  $\Phi$ , то наблюдается вначале возрастание фототока до некоторого значения, а затем ток остается постоянным, то есть не изменяется при дальнейшем увеличении анодного напряжения. Это максимальное значение тока при данном световом потоке называется фототоком насыщения ( $I_n$ ). Фототок насыщения достигается при таком анодном напряжении, когда все электроны, вырываемые светом из катода, попадают на анод. Сила фототока насыщения определяется количеством электронов, выбиваемых из катода за единицу времени. При увеличении светового потока ток насыщения возрастает. Это соответствует закону Столетова: ток насыщения пропорционален световому потоку.

$$I_n \sim \Phi \quad (2.23)$$

На рис. 2.4 видно, что при анодном напряжении, равном нулю, фототок не равен нулю. Причина этого в том, что электроны, выбитые светом из катода, имеют кинетическую энергию, за счёт которой они могут достигать анода. Вследствие этого возникает слабый ненулевой ток.

Чтобы обратить данный ток в ноль, поменяем местами клеммы подключения к источнику питания (1) (Рис.2.3). Тогда для электронов, вылетающих из катода, электрическое поле между анодом и катодом будет тормозящим. Напряжении, при котором сила тока в фотоэлементе обращается в ноль, называется **задерживающим напряжением**  $U_3$ . При данном напряжении даже те электроны, что вылетели из катода с максимальной скоростью, не могут долететь до анода. Для этого кинетическая энергия электронов должна быть равна работе тормозящего их электрического поля:

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = eU_3, \quad (2.24)$$

где  $e$  – заряд электрона.

Измеряя напряжение, при котором прекращается фототок, с помощью формулы (2.24) можно определить максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов и их максимальную скорость.

Исходя из (2.24), уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта (2.21) можно записать в виде

$$h\nu = A + eU_3 \quad (2.24a)$$

Из (2.24a) следует, что задерживающее напряжение  $U_3$  прямо пропорционально частоте падающего света:

$$U_3 = \frac{h\nu - A}{e} \quad (2.24б)$$

При красной границе фотоэффекта  $\nu_0$  (соответственно при длине волны  $\lambda_0$ ) в формуле (2.24б) числитель правой части обращается в ноль, следовательно задерживающее напряжение  $U_3$  при частоте  $\nu_0$  равно нулю.

### Пример 2

Красная граница фотоэффекта для некоторого металла соответствует длине волны  $\lambda_0 = 300$  нм. Найти: 1) работу выхода электрона  $A$  для этого металла; 2) длину волны  $\lambda$ , при которой величина задерживающего потенциала  $U_3 = 0,8$  В.

**Дано:**

$$\lambda_0 = 300 \text{ нм} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$U_3 = 0,8 \text{ В}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

---

**Найти:**

$A - ? \quad \lambda - ?$

**Решение:**

Красная граница фотоэффекта – это максимальная длина волны  $\lambda_0$  или минимальная частота  $\nu_0$ , при которой возникает фотоэффект. Это означает, что энергия фотона  $W_\phi = \frac{hc}{\lambda_0}$  равна работе выхода электрона из заданного металла.

Поскольку  $A = h \cdot c / \lambda_0$ , то подставляя численные значения, получим:

$$A = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 3 \cdot 10^{-7} = 6,63 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,14 \text{ эВ}.$$

Задерживающее напряжение  $U_3$  характеризует тормозящее для электрона электрическое поле. При  $U$ , равном  $U_3$ , электроны не долетают до анода.

Это можно записать уравнением:

$$\frac{mV_{max}^2}{2} = eU_3,$$

где  $\frac{mV_{max}^2}{2}$  – это максимальное значение кинетической энергии электрона, испускаемого катодом при его освещении;  $eU_3$  – работа электрического поля между катодом и анодом, тормозящего электрон.

Согласно уравнению Эйнштейна, для внешнего фотоэффекта:

$$h \frac{c}{\lambda} = A + \frac{mV_{max}^2}{2},$$

где  $h \frac{c}{\lambda}$  – энергия фотона, вызывающего фотоэффект, можно записать:

$$h \frac{c}{\lambda} = A + eU_3$$

Тогда искомое значение  $\lambda$  можно выразить по формуле:

$$\lambda = hc / (A + eU_3)$$

$$\lambda = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / (6,63 \cdot 10^{-19} + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,8) = 2,52 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответы:  $A = 6,63 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 4,14 \text{ эВ}$ ;  $\lambda = 2,52 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ .

## 2.5. Эффект Комптона

В 1923г. американский физик Комптон исследовал рассеяние рентгеновских лучей определенной длины волны легкими веществами (парафин, графит, бор и

другие). Диапазон длин волн рентгеновских лучей составляет от  $10^{-11}$  м до  $10^{-8}$  м. То есть их длины волн меньше, чем у коротковолновых ультрафиолетовых лучей.

Опыты Комптона показали, что рассеянные рентгеновские лучи под углом  $\Theta$  имеют длину волны  $\lambda'$  большую, чем длина волны  $\lambda$  лучей, падающих на вещество. При этом разность  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  зависит только от угла рассеяния  $\Theta$  (смысл этого угла поясняет рис.2.5). Она не зависит от свойств рассеивающего вещества и длины волны падающего рентгеновского излучения.

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_k \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2} \quad (2.25)$$

Или

$$\Delta\lambda = \lambda_k(1 - \cos\Theta), \quad (2.26)$$

где  $\lambda_k = \frac{h}{m_0 c} = 2,42 \cdot 10^{-12}$  м – комптоновская длина волны электрона. Здесь  $h$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света,  $m_0$  – масса покоя электрона.

Комптоновская длина волны  $\lambda_k$  оказалась постоянной для всех веществ. Эффект Комптона не получил удовлетворительного объяснения в волновой теории света. Объяснение эффекта Комптона было дано на основе квантовой теории электромагнитного излучения. Эффект Комптона можно объяснить, как результат упругого столкновения рентгеновских фотонов с электронами вещества, слабо связанными с ядрами атомов легких веществ. Такие электроны можно считать свободными. Фотон при взаимодействии с таким электроном передает ему часть своей энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения. Запишем закон сохранения энергии при рассеянии фотона на электроне

$$W_0 + W_\phi = W'_\phi + W_e, \quad (2.27)$$

где  $W_0$  – энергия покоя электрона ( $W_0 = m_0 c^2$ );  $W_\phi$  – энергия падающего фотона ( $W_\phi = \frac{hc}{\lambda}$ );  $W'_\phi$  – энергия рассеянного фотона ( $W'_\phi = \frac{hc}{\lambda'}$ );  $W_e$  – энергия электрона отдачи ( $W_e = mc^2$ ).

Т.к. скорость электрона отдачи может быть очень большой, то электрон нужно рассматривать как релятивистскую частицу. Т.е. надо учитывать зависимость массы электрона от его скорости. Тогда энергия электрона равна  $W_e = \sqrt{P_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ .

Запишем закон сохранения импульса при рассеянии фотона на электроне

$$\vec{P}_\phi = \vec{P}'_\phi + \vec{P}_e, \quad (2.28)$$

где  $\vec{P}_\phi$  – импульс падающего фотона,  $P_\phi = \frac{h}{\lambda}$ ;  $\vec{P}'_\phi$  – импульс рассеянного фотона ( $P'_\phi = \frac{h}{\lambda'}$ );  $\vec{P}_e$  – импульс электрона отдачи, ( $P_e = mv$ ).

Запишем более подробно закон сохранения энергии (2.27)

$$m_0 c^2 + h \frac{c}{\lambda} = h \frac{c}{\lambda'} + \sqrt{P_e^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \quad (2.29)$$

Закон сохранения импульса (2.28) (с учетом рис. 2.5) будет выглядеть:

$$P_e^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos\Theta. \quad (2.30)$$

Из совместного решения уравнений (2.29) и (2.30) можно получить выражение для разности длин волн падающего и рассеянного фотонов  $\Delta\lambda$  (см. (2.25) и (2.26)). Из этих уравнений следует, что увеличение длины волны будет наибольшим, если угол рассеяния  $\Theta = \pi$ , то есть при условии, когда фотон после рассеяния полетит в сторону, противоположную первоначальному направлению его движения. Согласно уравнению (2.25) при  $\Theta = \pi$  значение  $\Delta\lambda = 2\lambda_k$ . При этом электрон, на котором происходит рассеяние (электрон отдачи), приобретает наибольшую кинетическую энергию.

На рис. 2.5 представлено взаимное расположение векторов импульсов согласно закону сохранения импульса.

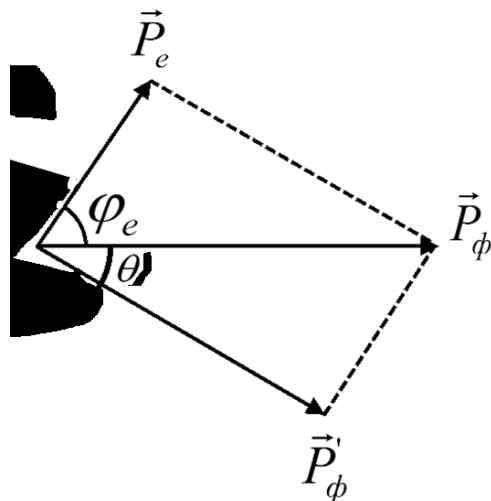


Рис. 2.5 Векторная диаграмма импульсов частиц в опытах Комптона.

### Пример 3.

Фотон с длиной волны  $\lambda = 1,1 \cdot 10^{-12}$  м в результате комптоновского рассеяния на свободном электроне отклонился от первоначального направления на угол  $\Theta$ . При этом энергия рассеянного фотона  $W_{\phi 2}$  составила 47% от энергии падающего фотона  $W_{\phi 1}$ . Определить угол рассеяния  $\Theta$  и импульс электрона отдачи  $p_e$ .

**Дано:**

$$\lambda = 1,1 \cdot 10^{-12} \text{ м}, W_{\phi 2} = 0,47 W_{\phi 1}$$

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

**Найти:**

$\Theta$  – ?;  $p_e$  – ?

**Решение:**

Энергия падающего фотона

$$W_{\phi 1} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,1 \cdot 10^{-12}} = 1,81 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)}.$$

Энергия рассеянного фотона

$$W_{\phi 2} = 0,47 \cdot W_{\phi 1} = 0,47 \cdot 1,81 \cdot 10^{-13} = 0,85 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)}.$$

Так как  $W_{\phi 2} = \frac{hc}{\lambda'}$ , то  $\lambda' = \frac{hc}{W_{\phi 2}}; \lambda' = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{0,85 \cdot 10^{-13}} = 2,34 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$

Из формулы Комптона:  $\Delta\lambda = \lambda_k(1 - \cos\theta)$ , получим

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_k} = 1 - \cos\theta; \cos\theta = 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_k} = 1 - \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda_k}$$

Подставим численные данные:

$$\cos\theta = 1 - \frac{2,34 \cdot 10^{-12} - 1,1 \cdot 10^{-12}}{2,43 \cdot 10^{-12}} \approx 0,5, \text{ тогда } \theta \approx 60^\circ$$

По закону сохранения энергии кинетическая энергия электрона

$$W_{ke} = W_{\phi 1} - W_{\phi 2} = W_{\phi 1} - 0,47W_{\phi 1} = 0,53W_{\phi 1}.$$

Т.к.

$$W_{\phi 1} = 1,81 \cdot 10^{-13} \text{ Дж, то } W_{ke} = 0,53 \cdot 1,81 \cdot 10^{-13} = 0,96 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} \approx 0,6 \text{ МэВ}.$$

Учитывая соизмеримость кинетической энергии электрона  $W_{ke}$  с энергией покоя электрона  $W_0$  ( $W_0 = 0,51 \text{ МэВ} = 0,82 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}$ ), определим импульс электрона, рассматривая его как релятивистскую частицу:

$$P_e = \frac{1}{c} \sqrt{W_{ke}(W_{ke} + 2W_0)}, \text{ здесь } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с (скорость света в вакууме)}.$$

$$P_e = \frac{10^{-13}}{3 \cdot 10^8} \sqrt{0,96(0,96 + 2 \cdot 0,82)} = 5,3 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$$

$$\text{Ответ: } \theta \approx 60^\circ, P_e = 5,3 \cdot 10^{-22} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

### 3. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

#### 3.1. Боровская модель атома водорода

В 1903 году Дж. Томсон предположил, что электрически нейтральный атом – это положительно заряженная сфера с вкрапленными в нее электронами, как изюм в булочку. Эта модель позволила определить размеры атома, близкие к размерам, известным из молекулярной физики. Однако, эксперименты Э. Резерфорда, при которых производилось зондирование атомов альфа-частицами, показали, что большую часть атома занимает пустота. На основе экспериментов Резерфорд создал планетарную модель атома. Согласно этой модели, вокруг положительного ядра, в котором сосредоточен весь положительный заряд атома и большая часть его массы, как планеты вокруг Солнца вращаются электроны. Суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду ядра.

Эта модель несостоятельна по трем причинам:

- 1) Такой атом неустойчив, поскольку электроны – заряженные частицы, движущиеся с ускорением (в данном случае, центростремительным), должны излучать электромагнитные волны. При этом должны терять энергию, постепенно приближаться к ядру и, в конце концов, упасть на ядро. Однако реальные атомы – устойчивые образования.
- 2) В нормальном состоянии никакого излучения атомов не наблюдается.
- 3) Плавное уменьшение радиуса орбиты должно приводить к монотонному изменению частоты излучения, т.е., к сплошному спектру излучения. В действительности, атомы имеют линейчатый спектр излучения (см. рис. 3.1).

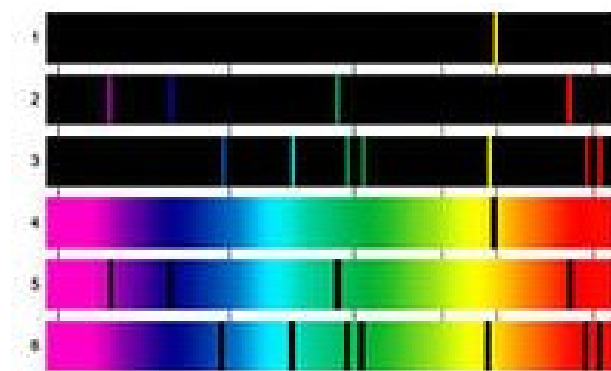


Рис. 3.1 Атомарные спектры испускания (1, 2, 3) и поглощения (4, 5, 6) натрия, водорода и гелия<sup>2</sup>.

Н. Бор в 1913 году предпринял попытку соединить планетарную модель атома, линейчатые спектры излучения атома и квантовый характер излучения и поглощения света, сформулировав несколько постулатов, которые были подтверждены в дальнейшем.

<sup>2</sup>[http://znakka4estva.ru/uploads/category\\_items/sources/7d305ab7f850045b1b40e9667a208f6d.jpg](http://znakka4estva.ru/uploads/category_items/sources/7d305ab7f850045b1b40e9667a208f6d.jpg)

### Постулаты Бора

1. Электроны в атоме движутся только по определенным стационарным орбитам, которым соответствуют строго определенные дискретные значения энергии. При движении по стационарным орбитам атом не излучает и не поглощает энергию. В стационарных состояниях моменты импульса электрона принимают значения, равные целому количеству некоторой величины (квантуются):  $m v_n r_n = n \hbar$ . Таким образом,  $\hbar$  является квантом момента импульса электрона.
2. При переходе из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается квант энергии  $h\nu = W_k - W_n$ , равный разности энергий стационарных состояний с номерами  $k$  и  $n$ .

В данных формулах  $m$  – масса электрона,  $v_n$  – его скорость в состоянии с номером  $n$ ,  $r_n$  – радиус орбиты электрона в этом стационарном состоянии,  $W_k$  и  $W_n$  энергия стационарных состояний с номерами  $k$  и  $n$ ,  $h$  – постоянная Планка,  $\hbar$  – редуцированная постоянная Планка. Теория Бора применима не только для атома водорода, но и для водородоподобных систем: ионов, состоящих из ядра, содержащего  $Z$  протонов ( $Z$  – зарядовое число, номер элемента в таблице Менделеева), и одного электрона.

*Определим радиусы боровских орбит.* Сила Кулона, действующая на электрон в водородоподобном атоме со стороны ядра, является центростремительной силой.

$$F_{\text{цс}} = F_{\text{Кул}} \quad (3.1)$$

$$m \frac{v_n^2}{r_n} = k \frac{Z q_e^2}{r_n^2}$$

где  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  – коэффициент в законе Кулона,  $q_e$  – величина заряда электрона,  $Zq_e$  – величина заряда ядра водородоподобного атома. Выразим скорость из постулата стационарных состояний:

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} \quad (3.2)$$

Подставим выражение для скорости в (3.1):

$$m \frac{n^2 \hbar^2}{m^2 r_n^2} = k \frac{Z q_e^2}{r_n}$$

Получим зависимость радиуса орбиты электрона  $r_n$  от номера орбиты  $n$ :

$$r_n = \frac{\hbar^2}{km \cdot Z q_e^2} n^2 \quad (3.3)$$

Заметим, что дробь, стоящая перед квадратом номера орбиты, является набором констант и соответствует радиусу орбиты электрона при  $n = 1$ . Тогда для атома водорода при  $Z=1$  можно записать:

$$r_n = a_0 n^2 \quad (3.4)$$

где  $a_0 = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$  – боровский радиус.

*Определим энергию электрона в атоме водорода.* Полная механическая энергия электрона в стационарном состоянии с номером  $n$  в атоме водорода (и в водородоподобной системе) равна сумме кинетической и потенциальной энергий:

$$W_n = W_{\text{пот}_n} + W_{\text{кин}_n}.$$

Кинетическая энергия электрона:

$$W_{\text{кин}_n} = \frac{mv_n^2}{2}$$

Подставим в формулу для скорости (3.2) выражение для радиуса орбиты (3.3). Получим:

$$v_n = \frac{\hbar n}{mr_n} = \frac{\hbar n k m Z q_e^2}{m \hbar^2 n^2} = \frac{k Z q_e^2}{\hbar n}.$$

Таким образом, выражение для кинетической энергии примет вид:

$$W_{\text{кин}_n} = \frac{m k^2 Z^2 q_e^4}{2 \hbar^2 n^2}.$$

Потенциальная энергия атома водорода (и водородоподобной системы) является энергией кулоновского взаимодействия положительного ядра, содержащего  $Z$  протонов, и отрицательно заряженного электрона, находящегося на орбите с номером  $n$ .

$$W_{\text{пот}_n} = - \frac{k Z q_e^2}{r_n}.$$

Подставим выражение для радиуса (3.3):

$$W_{\text{пот}_n} = - \frac{m k^2 Z^2 q_e^4}{\hbar^2 n^2}.$$

Видно, что модуль величины потенциальной энергии в 2 раза больше значения кинетической энергии. Таким образом, полная энергия:

$$W_n = - \frac{m k^2 Z^2 q_e^4}{2 \hbar^2 n^2}. \quad (3.5)$$

Учитывая все значения констант в (3.5), энергию для водородоподобного иона с зарядовым числом  $Z$  можно рассчитать по формуле:

$$W_n = - 13,6 \cdot \frac{Z^2}{n^2}, \text{ эВ} \quad (3.6)$$

В случае атома водорода ( $Z = 1$ ) формула для расчета полной энергии:

$$W_n = - 13,6 \cdot \frac{1}{n^2}, \text{ эВ} \quad (3.7)$$

При изображении энергетической диаграммы принято ось значений энергии откладывать по вертикали. Значения энергии, которыми обладает электрон в атоме, называются энергетическими уровнями. Энергетическая диаграмма атома

водорода изображена на рис. 3.2. Переходы электрона из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией (сверху вниз, с более высокого уровня на более низкий) сопровождаются испусканием фотона. Переход с более низкого энергетического уровня на более высокий возможен при поглощении фотона. Энергия фотона в соответствии со вторым постулатом Бора равна разности энергий этих уровней.

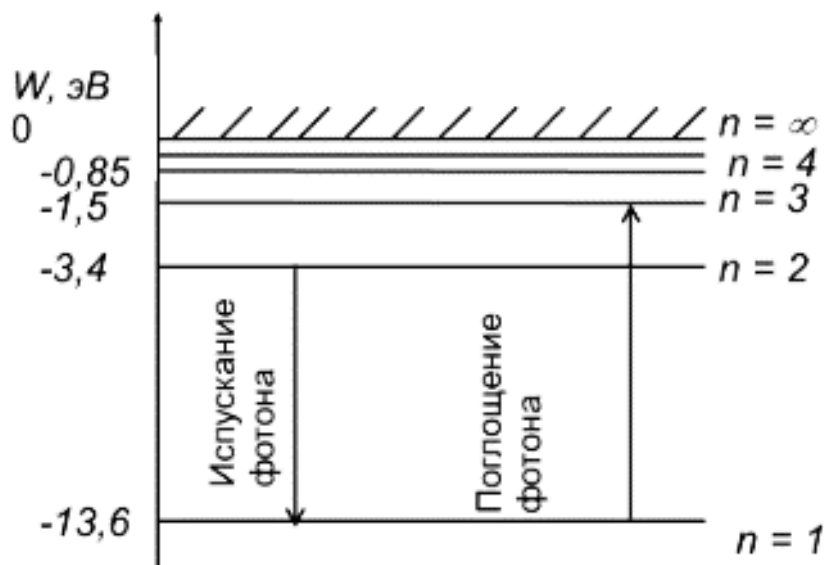


Рис. 3.2 Энергетическая диаграмма атома водорода.

### Пример 1

Свободный электрон, имея некоторую кинетическую энергию  $W_{кл}$ , столкнулся с атомом водорода, находящимся в первом возбужденном состоянии, и отскочил, приобретя дополнительную энергию. Импульс электрона после столкновения с покоящимся атомом оказался равен  $2,09 \cdot 10^{-24}$  кг·м/с. Определить кинетическую энергию электрона до столкновения. Излучение не учитывать.

**Дано:**

$$n_1 = 2$$

$$p_2 = 2,09 \cdot 10^{-24} \text{ кг·м/с}$$

---

**Найти:**

$$W_{кл} - ?$$

**Решение:**

Изменение кинетической энергии свободного электрона происходит за счет получения энергии от атома водорода. Атом водорода, отдавая энергию, перехо-

дит в состояние с меньшей энергией. Если атом находится в первом возбужденном состоянии, то состояние с меньшей энергией – это основное состояние, номер которого  $n_2 = 1$ . Разность энергий атома идет на совершение работы по ускорению свободного электрона. По теореме о кинетической энергии:

$$W_{\text{кин2}} - W_{\text{кин1}} = A$$

$$W_{\text{кин1}} = W_{\text{кин2}} - A$$

Найдем энергию, переданную атомом свободному электрону:

$$A = W_{n1} - W_{n2}$$

$$A = -13,6 \cdot \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 13,6 \cdot 0,75 = 10,2(\text{эВ}) = 1,632 \cdot 10^{-18}(\text{Дж})$$

Найдем конечную энергию свободного электрона:

$$W_{\text{кин2}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{(2,09 \cdot 10^{-24})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 2,4 \cdot 10^{-18}(\text{Дж}) = 15(\text{эВ})$$

Найдем кинетическую энергию электрона до столкновения:

$$W_{\text{кин1}} = W_{\text{кин2}} - A = 15 - 10,2 = 4,8(\text{эВ}) = 7,68 \cdot 10^{-18}(\text{Дж})$$

$$\text{Ответ: } W_{\text{кин1}} = 4,8(\text{эВ}) = 7,68 \cdot 10^{-18}(\text{Дж})$$

#### *Достижения теории Бора*

- Объяснила спектры испускания и поглощения для атома водорода
- Точно предсказала энергию ионизации атома водорода

#### *Трудности модели Бора*

- Не получается объяснить спектры испускания и поглощения для много-электронных атомов
- Не объяснить, почему одни линии ярче других
- Не объясняются связи между атомами
- Стабильность атома принимается за аксиому

Все эти трудности и противоречия снимаются в квантово-механической модели атома.

### 3.2. Волны де Бройля

#### **Концепция корпускулярно-волнового дуализма**

Развитие физики XIX-XX вв. показало, что свет обладает как волновыми, так и корпускулярными свойствами. Это проявляется в таких свойствах света: 1) интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия, которые отражают волновые свойства световых волн; 2) явление фотоэффекта, комптоновское рассеяние, тепловое излучение, которые отражают квантовую природу света. Первая группа свойств требует описания света как электромагнитной волны, которая характеризуется частотой  $\nu$ , циклической частотой  $\omega$  и длиной волны  $\lambda$ . Эти параметры связаны между собой следующими соотношениями

$$\omega = 2\pi\nu; \quad c = \lambda\nu; \quad \omega = 2\pi c/\lambda \quad (3.8)$$

Вторая группа свойств указывает на то, что свет представляет собой поток фотонов (квантов), обладающих энергией и импульсом. Энергия  $W$  и импульс  $p$  связаны с волновыми характеристиками следующими соотношениями

$$W = h\nu = \hbar\omega; \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad (3.9)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка,  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – редуцированная постоянная Планка. Данное свойство света получило название **корпускулярно-волнового дуализма**.

В 1924г. Луи де Бройль (французский физик), анализируя опытные данные, пришел к выводу, что двойственность света должна быть распространена и на любые частицы вещества. Гипотеза де Бройля заключалась в том, что микрочастицы помимо корпускулярных свойств, обладают еще и волновыми свойствами, т.е. при определенных условиях ведут себя как волны.

Количественные соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц, такие же, как для фотонов (3.9). Идея де Бройля состояла в том, что эти соотношения имеют универсальный характер, справедливый для любых волновых процессов. Любой частице, обладающей импульсом  $p$ , соответствует волна, длина которой вычисляется по формуле де Бройля:

$$\lambda_{дб} = \frac{h}{p} \quad (3.10)$$

Следует отметить, волны де Бройля не являются электромагнитными. Волна де Бройля – это математическая модель, описывающая поведение микрочастиц в соответствующих условиях. В настоящее время физики пришли к следующей интерпретации физического смысла волн де Бройля: *поведение микрочастиц носит вероятностный характер, а волна де Бройля – математический инструмент для расчета этой вероятности.*

В 1927 году Дэвиссон и Джермер (амер. физики) подтвердили гипотезу де Бройля, обнаружив дифракцию электронов на кристалле никеля. Дальнейшее подтверждение гипотезы де Бройля нашло в опытах Л.С. Тартаковского и Г. Томсона, наблюдавших дифракционную картину при прохождении пучка быстрых электронов ( $E \sim 50$  кэВ) через фольгу из различных металлов. Затем была обнаружена дифракция нейтронов, протонов, атомных пучков и молекулярных пучков. Таким образом, гипотеза де Бройля была экспериментально подтверждена и сейчас это надёжно установленный факт. Следует отметить, что корпускулярно-волновой дуализм практически проявляется только для микрочастиц (электронов, нейтронов, протонов, атомов, молекул). Что касается макроскопических тел, то эти тела теоретически также должны обладать волновыми свойствами, но в силу их макроскопической массы, длина волны де Бройля для них крайне мала. Так, для тел с массой  $\sim 1$  г дебройлевская длина волны составляет  $\sim 10^{-37}$  м, что невозможно обнаружить современными методами. Поэтому все макротела в современной физике рассматриваются только как корпускулы.

Для грамотного использования формулы (3.10) необходимо рассмотреть два случая движения частиц: 1) нерелятивистский случай и 2) релятивистский случай.

### Нерелятивистский (классический) случай

В этом случае скорость частицы много меньше скорости света  $c$ , а кинетическая энергия частицы  $W_k$  много меньше её энергии покоя, что выражается следующими соотношениями  $v \ll c$ ;  $W_k \ll m_0 c^2$ . Формулу (3.10) в этом случае можно записать:

$$\lambda_{дб} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mW_k}}, \quad (3.11)$$

где  $p = mv = \sqrt{2mW_k}$  импульс частицы, выраженный через массу  $m$  и скорость  $v$  и через кинетическую энергию  $W_k$ . Иногда в задачах  $\lambda_{дб}$  выгодно выразить через ускоряющее напряжение  $U$ , которое проходит частица с зарядом  $q$ . В этом случае кинетическая энергия частицы определится по формуле

$$W_k = qU, \quad (3.12)$$

Подставляя её в (3.11), получим формулу

$$\lambda_{дб} = \frac{h}{\sqrt{2mqU}} \quad (3.13)$$

### Релятивистский случай

В этом случае скорость частицы порядка скорости света  $c$  (но не превышает её!), а кинетическая энергия  $W_k$  частицы порядка (или больше) её энергии покоя  $m_0 c^2$ , что выражается следующими соотношениями  $v \sim c$ ;  $W_k \geq m_0 c^2$ . Формулу (3.10) в этом случае можно записать:

$$\lambda_{дб} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{hc}{\sqrt{W_k(W_k + 2m_0 c^2)}}, \quad (3.14)$$

где  $W_k$  – кинетическая энергия релятивистской частицы,  $v$  скорость частицы,  $m_0$  – масса покоя частицы.

### Пример 2

Через какую разность потенциалов  $U_1$  необходимо пропустить ядро кислорода  $^{16}_8\text{O}$ , чтобы его дебройлевская длина волны  $\lambda_{дб1}$  стала такой же как у ядра гелия  $^4_2\text{He}$  имеющую кинетическую энергию  $W_k = 320$  эВ?

#### Дано:

$^{16}_8\text{O}$  - ядро кислорода;

$^4_2\text{He}$  - ядро гелия;

$W_k = 320$  эВ - кинетическая энергия ядра гелия

---

#### Найти:

$U_1$  – ? (для ядра кислорода)

#### Решение:

Данная задача относится к нерелятивистской области, поскольку  $W_k \ll m_{He} c^2$ .

Введём удобные обозначения. Все параметры задачи, относящиеся к кислороду, обозначим индексом «1», а относящиеся к гелию индексом «2». По формуле (3.13) запишем длину волны де Бройля для кислорода

$$\lambda_{дб1} = \frac{h}{\sqrt{2m_1q_1U_1}}, \quad (1)$$

где  $m_1$  – масса ядра кислорода;  $q_1$  – заряд ядра кислорода;  $U_1$  – искомая разность потенциалов для ядра кислорода, которую необходимо определить в задаче. Определим массу и заряд для ядра кислорода. Воспользуемся обозначениями, которые даны в задаче –  $^{16}_8\text{O}$ . Верхний индекс здесь обозначает массу ядра кислорода, выраженную в атомных единицах массы ( $m_a = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг – атомная единица массы). Следовательно:  $m_1 = 16m_a$ . Нижний индекс обозначает заряд ядра, выраженный в единицах элементарного заряда  $e$ . Следовательно:  $q_1 = 8e$ .

По формуле (3.11) запишем длину волны де Бройля для гелия

$$\lambda_{дб2} = \frac{h}{\sqrt{2m_2W_{к2}}}, \quad (2)$$

где  $m_2$  – масса ядра гелия;  $q_2$  – заряд ядра гелия;  $W_{к2}$  – кинетическая энергия ядра гелия равная 320 эВ. Определим массу и заряд для ядра гелия. Поступаем аналогично, как и для кислорода. Символическое обозначение для гелия  $^4_2\text{He}$ . Следовательно:  $m_2 = 4m_a, q_2 = 2e$ .

Кинетическую энергию ядра гелия  $W_{к2}$  удобно выразить по формуле (3.13):  $W_{к2} = q_2U_2 = 320$  эВ, отсюда находим

$$U_2 = \frac{320 \text{ эВ}}{q_2} = \frac{320 \cdot e \text{ Дж}}{2e} = 160 \text{ В} \quad (3)$$

В (3) мы выразили 320 эВ в джоулях, домножив 320 эВ на элементарный заряд  $e$ , а затем сократили на  $e$ . Теперь удобно записать длину волны де Бройля для гелия по формуле (3.13)

$$\lambda_{дб2} = \frac{h}{\sqrt{2m_2q_2U_2}} \quad (4)$$

По условию задачи

$$\lambda_{дб1} = \lambda_{дб2} \quad (5)$$

Подставим в (5) выражения (1) и (4)

$$\frac{h}{\sqrt{2m_1q_1U_1}} = \frac{h}{\sqrt{2m_2q_2U_2}} \quad (6)$$

Сократим в (6) слева и справа на  $h$  и  $\sqrt{2}$ , затем используя алгебраические преобразования получим расчетную формулу для  $U_1$

$$U_1 = \frac{m_2q_2}{m_1q_1} U_2 \quad (7)$$

Подставим в (7) найденные величины  $m_1, m_2, q_1, q_2, U_2$  и получим ответ:

$$U_1 = \frac{4m_a2e}{16m_a8e} 160 = 10 \text{ В.}$$

**Ответ:**  $U_1 = 10 \text{ В.}$

### 3.3. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

В разделе волны де Бройля мы показали, что микрочастицы одновременно проявляют себя как волны, и как корпускулы. К ним не применимы законы классической физики частиц и волн. В квантовой физике доказывается, что к микрочастице нельзя применять понятие траектории, но можно сказать, что частица находится в данном объеме пространства с некоторой вероятностью  $P$ . Уменьшая объем, мы будем уменьшать вероятность обнаружить частицу в нем. Вероятностное описание траектории (или положения) частицы приводит к тому, что импульс и, следовательно, скорость частицы может быть определена с какой-то определенной точностью.

Если поместить частицу в данную точку пространства, то мы ничего не сможем сказать о длине волны частицы. Действительно, волновой процесс подразумевает некий объем пространства, в котором он сосредоточен (вспомним о волнах на поверхности моря). Следовательно, для частицы с точно заданной координатой импульс становится полностью неопределённым. Это напрямую следует из формулы  $\lambda_{дб} = \frac{h}{p}$ , выразим отсюда импульс  $P$  частицы, тогда:

$$P = \frac{h}{\lambda_{дб}} \quad (3.15)$$

Поскольку для точки определить длину волны невозможно, то импульс становится полностью неопределённым. Длина волны, а вместе с ней и импульс частицы, можно определить, только если участок  $\Delta x$  является достаточно протяжённым. Чем больше  $\Delta x$  (неопределённость координаты), тем меньше неопределённость импульса  $\Delta p_x$ , тем точнее определён импульс  $p_x$  и наоборот, чем меньше  $\Delta x$ , тем больше неопределенность в нахождении  $\Delta p_x$ . Из этих качественных рассуждений вытекают соотношения неопределенностей между импульсом и координатой, которые впервые были получены немецким физиком Гейзенбергом и носят название **соотношения неопределенностей Гейзенберга**. Запишем эти соотношения для координат  $x, y, z$  и импульсов  $p_x, p_y, p_z$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}; \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}; \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.14)$$

где  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – редуцированная постоянная Планка. Часто в (3.14) пренебрегают коэффициентом  $1/2$  и тогда соотношения неопределенностей Гейзенберга выглядят

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar; \Delta y \Delta p_y \geq \hbar; \Delta z \Delta p_z \geq \hbar \quad (3.15)$$

Соотношение неопределенностей Гейзенберга устанавливает границу в одновременном определении точности канонически сопряженных величин, к которым относятся координата и импульс. Смысл соотношений (3.14) и (3.15) заключается в следующем: *произведение неопределенностей координаты  $\Delta x$  и импульса  $\Delta p_x$  (аналогично для двух других канонически сопряженных величин) не может быть по порядку величины меньше постоянной Планка  $\hbar$* . Таким образом, для микрочастицы не существует состояний, в которых её координата и импульс имели бы одновременно точные значения. Чем меньше неопределенность одной

величины, тем больше неопределенность другой. Здесь надо иметь в виду, что неопределенность координаты и импульса в (3.14) и (3.15) не определяется нашими измерительными приборами, а задаётся фундаментальными законами физики.

Помимо соотношения неопределенностей между импульсом и координатой, в физике существует соотношение неопределенностей между энергией и временем

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar \quad (3.16)$$

где  $\Delta W$  – неопределенность энергии частицы,  $\Delta t$  – неопределенность времени нахождения частицы в данном состоянии. Из соотношения (3.16) вытекает, что энергетические уровни атомов в возбуждённых состояниях никогда не задаются точно, а известны с определённой погрешностью  $\Delta W$ . Из соотношения (3.16) также следует, что частота фотона  $\omega$ , излученного атомом, никогда не имеет точного значения, а определяется с определённой погрешностью  $\Delta\omega = \frac{1}{\tau}$ , где  $\tau$  – время пребывания атомом в возбуждённом состоянии.

Следует отметить, что соотношения неопределенностей Гейзенберга имеют смысл практически только для микрочастиц (электронов, нейтронов, протонов, атомов, молекул). Для макроскопических тел с массой  $\sim 1$  г неопределенность координаты составляет  $\sim 10^{-37}$  м. Современные физические методы не позволяют проводить измерения с такой точностью, а потому соотношения неопределенностей Гейзенберга для макротел не используется, и принято считать, что координата и импульс для таких тел известны точно.

### Пример 3

Ядро азота  ${}^{14}_7N$  ускоряется напряжением  $U$  и влетает в камеру Вильсона. Неопределенность координаты ядра можно измерить с погрешностью 1 нм, а неопределённость импульса с точностью 0.1%. Оценить нижнюю границу напряжения  $U_n$ , при котором ещё можно произвести измерения координаты и импульса с указанной точностью.

**Дано:**

${}^{14}_7N$  – ядро азота;

$\Delta x = 1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м};$

$$\frac{\Delta p}{p} = 0.1\% = 10^{-3}$$

**Найти:**

$U_n$  – ?

**Решение:**

1) Выразим кинетическую энергии через импульс частицы

$$W_k = \frac{p^2}{2m}. \quad (1)$$

Выразим отсюда импульс  $p$ :

$$p = \sqrt{2mW_k}. \quad (2)$$

С другой стороны, кинетическую энергии можно записать через ускоряющее напряжение  $U$  и заряд частицы  $q$ :

$$W_k = qU. \quad (3)$$

Подставим (3) в (2), получим

$$p = \sqrt{2mqU} \quad (4)$$

Запишем неопределенность импульса, используя условие задачи

$$\Delta p = 10^{-3} \sqrt{2mqU} \quad (5)$$

Запишем соотношение неопределенностей Гейзенберга между импульсом и координатой

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (6)$$

Подставим в (6) соотношение (5)

$$\Delta x 10^{-3} \sqrt{2mqU} \geq \hbar \quad (7)$$

Возведём в квадрат левую и правую часть (7)

$$\Delta x^2 10^{-6} 2mqU \geq \hbar^2 \quad (8)$$

Запишем соотношение для напряжения  $U$ , используя (8)

$$U \geq \frac{\hbar^2}{10^{-6} 2m \Delta x^2 q} \quad (9)$$

Неравенство (9) является расчётной формулой нашей задачи. Определим массу  $m$  и заряд  $q$  для частицы. Воспользуемся обозначениями, которые даны в задаче –  ${}^{14}_7N$ . Верхний индекс здесь обозначает массу ядра азота, выраженную в атомных единицах массы ( $m_a = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг – атомная единица массы). Следовательно:  $m = 14m_a$ . Нижний индекс обозначает заряд ядра, выраженный в единицах элементарного заряда  $e$  ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.). Следовательно:  $q = 7e$ .

Подставим все известные числовые параметры в (9)

$$U \geq \frac{(1,05 \cdot 10^{-34})^2}{10^{-6} 2 \cdot 14 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \cdot (10^{-9})^2 \cdot 7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,21 \text{ В} \quad (10)$$

Нижняя граница напряжения  $U_n$  определяется из неравенства (10) и равна 0,21 В, следовательно  $U_n = 0,21 \text{ В}$ .

**Ответ:**  $U_n = 0,21 \text{ В}$

### 3.4. Волновая функция и ее физический смысл

В квантовой механике любые микрочастицы наряду с корпускулярными обладают волновыми свойствами. Волновые свойства выражаются в том, что частицы могут интерферировать или дифрагировать, проходя через какие-либо неоднородности или вблизи каких-либо препятствий. Для каждой частицы можно

ввести волну де Бройля с длиной волны  $\lambda_{дб} = \frac{h}{p}$ . Из-за волновых свойств поведение микрочастиц носит вероятностный характер. М. Борн (немецкий физик) предположил, что по волновому закону меняется не сама вероятность, а амплитуда вероятности, которую также называют волновой функцией или  $\Psi$  – функцией (пси-функцией). Волновая функция  $\Psi(x, y, z, t)$  в общем случае зависит от трёх пространственных координат  $x, y, z$  и от времени  $t$ . В соответствии с интерпретацией Борна физический смысл имеет не сама пси-функция, а квадрат ее модуля  $|\Psi|^2$ . Квадрат модуля  $|\Psi|^2$  определяет плотность вероятности  $\rho(x, y, z, t)$  обнаружить частицу в данной точке пространства  $x, y, z$ . Таким образом  $\rho(x, y, z, t) = |\Psi|^2$ . Зная плотность вероятности  $\rho$ , можно рассчитать вероятность  $dw$  попадания частицы в элемент объема  $dV$

$$dw = \rho dV = |\Psi|^2 dV \quad (3.17)$$

Формулу (3.17) можно распространить на весь объем, занимаемый частицей (в общем случае бесконечный). Если мы точно знаем, что данном объеме частица присутствует (достоверное событие), то вероятность такого события обращается в 1. Поэтому интегрируя (3.17) по всему объему  $V$ , мы получаем соотношение

$$\int |\Psi|^2 dv = \int \rho dv = 1 \quad (3.18)$$

Соотношение (3.18) в квантовой механике носит название **условие нормировки**. В квантовой механике принимается, что  $\Psi$  и  $A\Psi$ , где  $A = const$ , описывают одно и то же состояние частицы. Если  $A\Psi$  подставить в (3.18), то мы получим

$$A^2 \int |\Psi|^2 dv = 1 \quad (3.19)$$

Условие нормировки (3.19) используют, чтобы определить неизвестную константу  $A$  на которую домножается волновая функция  $\Psi$ .

Условия, которые налагаются на волновую функцию  $\Psi$ .

Функция  $\Psi$  должна быть:

- 1) конечной (так как вероятность  $w$  не может быть больше единицы по определению);
- 2) однозначной (нельзя обнаружить частицу при неизменных условиях с вероятностью допустим 0,01 и 0,9, так как вероятность должна быть однозначной);
- 3) непрерывной, поскольку производная от  $\Psi$  должна быть определена во всей области движения частицы;
- 4) иметь непрерывную первую производную (характер движения тела не должны отличаться радикально в двух бесконечно близких точках);
- 5) волновая функция удовлетворяет принципу суперпозиции: если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$  то она может находиться в состоянии  $\Psi$ , описываемой линейной комбинаций этих функций:

$$\Psi = \sum C_n \Psi_n, \quad (3.20)$$

где  $C_n$  – любые комплексные числа.

С помощью волновой функции  $\Psi$  вычисляются средние значения любой физической величины  $L$  (координаты, импульса, момента импульса и т.п.) по правилу

$$\langle L \rangle = \int \Psi^* \hat{L} \Psi dV, \quad (3.21)$$

где  $\langle L \rangle$  – среднее значение величины  $L$ ;  $\Psi^*$  – комплексно сопряжённая волновая функция;  $\hat{L}$  – оператор физической величины  $L$ .

### 3.5. Уравнение Шрёдингера

Уравнение Шрёдингера является основным уравнением квантовой физики. Оно является следствием волновой природы частиц, решая его можно определить волновую функцию  $\Psi$  физической системы. Уравнение Шрёдингера строго логически ниоткуда не следует, его нужно рассматривать как исходное основное предположение, справедливость которого доказывается тем, что все вытекающие из него следствия точно согласуются с экспериментальными данными.

В квантовой механике выделяют временное уравнение Шрёдингера и стационарное уравнение Шрёдингера. Временное уравнение Шрёдингера записывается в виде:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(r, t) \Psi \quad (3.22)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица;  $\hbar$  – постоянная Планка;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа;  $U(r, t)$  – потенциальная функция частицы в силовом поле;  $m$  – масса частицы.

Если силовое поле, в котором движется частица, стационарно (т.е. не изменяется с течением времени), то функция  $U$  не зависит от времени и имеет смысл потенциальной энергии. В этом случае решение уравнения Шрёдингера (т.е.  $\Psi$  – функция) может быть представлено в виде произведения двух сомножителей – один зависит только от координат, другой – только от времени:

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) e^{-i \frac{W}{\hbar} t}, \quad (3.23)$$

где  $W$  – полная энергия частицы, постоянная в случае стационарного поля.

Если (3.23) подставить в (3.22), то временное уравнение Шрёдингера превращается в стационарное (т.е. не зависящее от времени  $t$ ) уравнение Шрёдингера

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U(r)) \Psi = 0, \quad (3.24)$$

где  $\Psi(x, y, z)$  – волновая функция, зависит только от координат  $x, y, z$ .

Как правило большинство задач квантовой механики сводится к решению стационарного уравнения Шрёдингера. Решения, удовлетворяющие уравнению Шрёдингера, называются собственными функциями ( $\Psi_1, \Psi_2 \dots \Psi_n \dots$ ), а соответствующие им значения энергии ( $W_1, W_2 \dots W_n \dots$ ), – собственными значениями энергии. Совокупность собственных значений называется энергетическим спектром. Если  $W_n$  принимает дискретные значения, то спектр – дискретный, если непрерывные – сплошной или непрерывный.

В качестве примера мы рассмотрим два вида квантово-механических задач: 1) частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками; 2) прохождение частицы сквозь барьер прямоугольной формы.

### 3.5.1. Частица в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками

На рис. 3.3 показана физическая система для данной задачи. Потенциальная энергия  $U(x)$  определяется следующими соотношениями:

$$U(x) = \infty, \text{ при } x < 0; U(x) = 0, \text{ при } 0 \leq x \leq l; U(x) = \infty, \text{ при } x > l \quad (3.25)$$

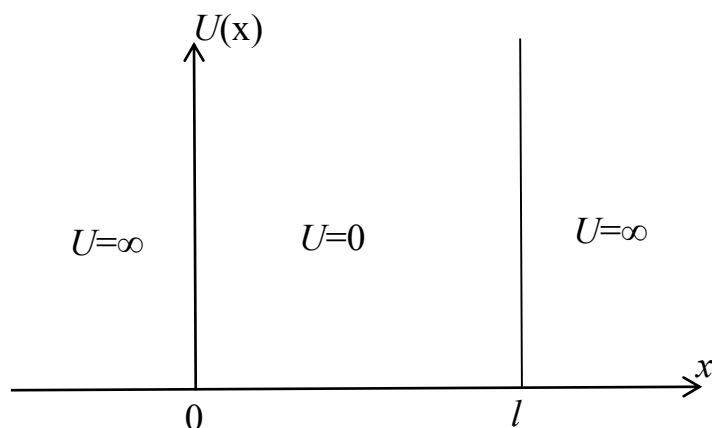


Рис. 3.3 Яма с бесконечно высокими стенками.

Данная задача является одномерной, частица находится в области  $0 \leq x \leq l$ , где  $l$  – ширина потенциальной ямы. Частица не может попасть в область  $x < 0$  и в область  $x > l$ , т.к. в этом случае её энергия станет равна бесконечности, что физически бессмысленно. В указанных областях ( $x < 0$ ;  $x > l$ ) волновая функция частицы обращается в ноль ( $\Psi(x) = 0$ ), что показывает, что здесь частица находиться не может. В силу непрерывности волновая функция в точках  $x = 0$  и  $x = l$  также равна нулю

$$\Psi(x) = 0 \text{ в точках } x = 0 \text{ и } x = l \quad (3.26)$$

Соотношение (3.26) называются граничными условиями задачи.

Используем стационарное уравнение Шредингера (3.22). С учётом (3.24) для области  $0 \leq x \leq l$  оно может быть записано в виде

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} W\Psi = 0 \quad (3.27)$$

Введём константу  $k$ , которая определяется из соотношения

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} W \quad (3.28)$$

Тогда (3.27) запишется

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2\Psi = 0 \quad (3.29)$$

Уравнение (3.29) представляет собой классическое дифференциальное уравнение некоторого колебательного процесса, а потому его решение в общем виде записывается следующим образом

$$\Psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (3.30)$$

Используя первое граничное условие (3.26) в  $x = 0$ , можно показать, что  $B = 0$ . Следовательно,

$$\Psi(x) = A \sin kx \quad (3.31)$$

Теперь используем второе граничное условие (3.26) в  $x = l$ , получаем

$$\Psi(l) = A \sin kl = 0 \quad (3.32)$$

Решая (3.32), получаем

$$kl = n\pi, \quad (3.33)$$

где  $n = 1, 2 \dots$  любое натуральное число.

Выражаем  $k$  из (3.33)

$$k = \frac{n\pi}{l} \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в (3.28), мы определяем спектр энергий частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad (3.35)$$

где  $n = 1, 2 \dots$  называется **главным квантовым числом**, оно определяет номер энергетического уровня, на котором находится частица. Таким образом, частица в потенциальной яме может находиться только на определенном энергетическом уровне  $W_n$  (или как говорят «находится в квантовом состоянии  $n$ »), энергетический спектр данной системы является дискретным.

Каждому энергетическому уровню  $W_n$  соответствует своя волновая функция

$$\Psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.35)$$

Неизвестную константу  $A$  находим из условия нормировки (3.19)

Если подставить (3.35) в (3.19) и провести интегрирование, то можно определить константу  $A$ . В нашем случае постоянная  $A$  равна  $\sqrt{\frac{2}{l}}$ . Подставляя  $A$  в (3.35) получаем окончательный вид волновых функций

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3.36)$$

Из (3.36) определяем плотность вероятности  $\rho(x) = |\Psi|^2$

$$\rho_n(x) = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \quad (3.37)$$

Графики  $\Psi_n(x)$  и  $\rho_n(x)$  для квантовых состояний  $n = 1, 2, 3$  изображены на рис. 3.4

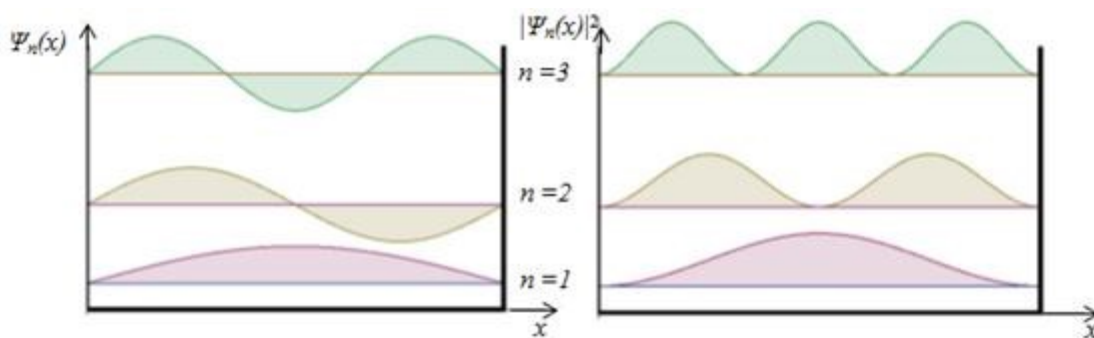


Рис. 3.4 Волновые функции и плотности вероятности для состояний  $n = 1, 2, 3$ .

Из рис.3.4 видно, что плотность вероятности меняется в зависимости от  $n$ : при  $n = 1$  частица, скорее всего, будет посередине ямы ( $x = \frac{l}{2}$ ), но не на краях; при  $n = 2$  наиболее вероятное положение частицы при  $x = \frac{l}{4}$  и  $x = \frac{3l}{4}$ ; при  $n = 3$  наиболее вероятное положение частицы при  $x = \frac{l}{6}, \frac{l}{2}, \frac{5l}{6}$ .

Если мы хотим определить вероятность  $w$  попадания частицы в область  $[x_1, x_2]$ , то мы должны проинтегрировать соотношение  $dw = \rho dV = |\Psi|^2 dV$  по всей области  $[x_1, x_2]$ :

$$w = \int_{x_1}^{x_2} |\Psi|^2 dV = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx \quad (3.37a)$$

Формула (3.37a) является расчетной для задач на потенциальную яму с бесконечно высокими стенками.

#### Пример 4

Ядро углерода  $^{12}_6\text{C}$  находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  с бесконечно высокими стенками на втором энергетическом уровне. Запишите волновую функцию и плотность вероятности данного состояния. Изобразите графически волновую функцию и плотность вероятности частицы. Определите на графике точки, где: 1) вероятность обнаружить частицу минимальная; 2) вероятность обнаружить частицу максимальная. Рассчитайте вероятность  $w$  попадания частицы в область  $l/4 < x < 2l/3$ .

**Дано:**

$^{12}_6\text{C}$  – ядро углерода;

$n = 2$  (номер энергетического уровня)

**Найти:**

1)  $\{x_{\min}\}$

2)  $\{x_{\max}\}$

3)  $w$  –? Для области  $l/4 < x < 2l/3$

**Решение:**

1) Воспользуемся формулой (3.36) для волновых функций в одномерной прямоугольной потенциальной яме

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (1)$$

В нашем случае номер энергетического уровня  $n = 2$ . Подставляем его в (1) и получаем формулу

$$\Psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x \quad (2)$$

Определяем плотность вероятности для данного квантового состояния по формуле (3.37)

$$\rho_2(x) = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x \quad (3)$$

Изобразим  $\Psi_2(x)$  и  $\rho_2(x)$  в виде графика. Их вид показан на Рис.3.4 ( $n = 2$ ). Из графика видно, что: 1) точки, где вероятность обнаружить частицу минимальная равны  $x_{min} = 0, \frac{l}{2}, l$ ; 2) точки, где вероятность обнаружить частицу максимальная равны  $x_{max} = \frac{l}{4}, \frac{3l}{4}$ . Вероятность обнаружить частицу в области  $\frac{l}{4} < x < \frac{2l}{3}$  определим по формуле (3.38), учитывая номер энергетического уровня  $n = 2$  и пределы интегрирования, получаем

$$w = \int_{l/4}^{2l/3} |\Psi|^2 dV = \frac{2}{l} \int_{l/4}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx \quad (4)$$

Разложим  $\sin^2 \frac{2\pi}{l} x$  по формуле двойного угла:  $\sin^2 \frac{2\pi}{l} x = \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{l} x}{2}$  и поставим в (4)

$$w = \frac{2}{l} \int_{l/4}^{2l/3} \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{l} x}{2} dx = \frac{2}{l} \left[ \frac{1}{2} \int_{l/4}^{2l/3} dx - \int_{l/4}^{2l/3} \cos \frac{4\pi}{l} x dx \right] \quad (5)$$

Берём интегралы в (5) по стандартным правилам математического анализа и получаем

$$w = \frac{2}{l} \left[ \frac{5l}{24} - \frac{l\sqrt{3}}{8\pi} \right] = 0,278$$

**Ответ:** 1)  $x_{min} = 0, \frac{l}{2}, l$ ; 2)  $x_{max} = \frac{l}{4}, \frac{3l}{4}$ ; 3)  $w = 0,278$

### 3.5.2. Прохождение частицы сквозь барьер прямоугольной формы

Физическая модель данной задачи изображена на Рис. 3.5. Частица с энергией  $W$  налетает на потенциальный прямоугольный барьер высотой  $U_0$ . Потенциальная энергия для частицы в поле движения барьера имеет вид:

$$U(x) = 0, \text{ при } x < 0; U(x) = U_0, \text{ при } 0 \leq x \leq l; U(x) = 0, \text{ при } x > l.$$

Опишем поведение частицы, налетающий на потенциальный барьер, для двух случаев: 1) классическая частица; 2) квантовая частица.

Классическая частица : при  $W > U_0$  она пройдет над барьером, при  $W < U_0$  – отразится от него.

Квантовая частица: при  $W > U_0$  есть вероятность того, что частица отразится от барьера, при  $W < U_0$  есть вероятность того, что пройдет сквозь барьер. Прохождение классической частицы сквозь барьер при  $W < U_0$  исключается, поскольку при этом кинетическая энергия частицы внутри барьера станет отрицательной, что физически бессмысленно. Для квантовой частицы прохождение сквозь барьер при  $W < U_0$  возможно из-за соотношения неопределённостей, поэтому существует вероятность того, что она пройдет сквозь барьер. Такое явление получило название в физике туннельного эффекта. На Рис. 3.5 вся область движения поделена на три области: 1)  $x < 0$  область налетающих и отражённых частиц; 2)  $0 \leq x \leq l$  область барьера; 3)  $x > l$  область частиц прошедших сквозь барьер.

Из решения уравнения Шрёдингера следует, что волновые функции в областях 1,2,3 определяются соотношениями:

$\Psi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$  – волновая функция налетающей и отражённой от барьера частицы;

$\Psi_2 = A_2 e^{-\beta x}$  – волновая функция частицы внутри барьера;

$\Psi_3 = A_3 e^{ikx}$  – волновая функция частицы, прошедшей сквозь барьер.

Рассчитаем вероятность  $D$  (коэффициент прозрачности барьера), что частица с энергией  $W$  пройдёт сквозь барьер ширины  $l$ . Предполагаем, что энергия частицы  $W$  меньше высоты  $U_0$  потенциального барьера ( $W < U_0$ ).

Запишем стационарное уравнение Шрёдингера (3.24) для нашего случая

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (W - U_0) \Psi = 0 \quad (3.38)$$

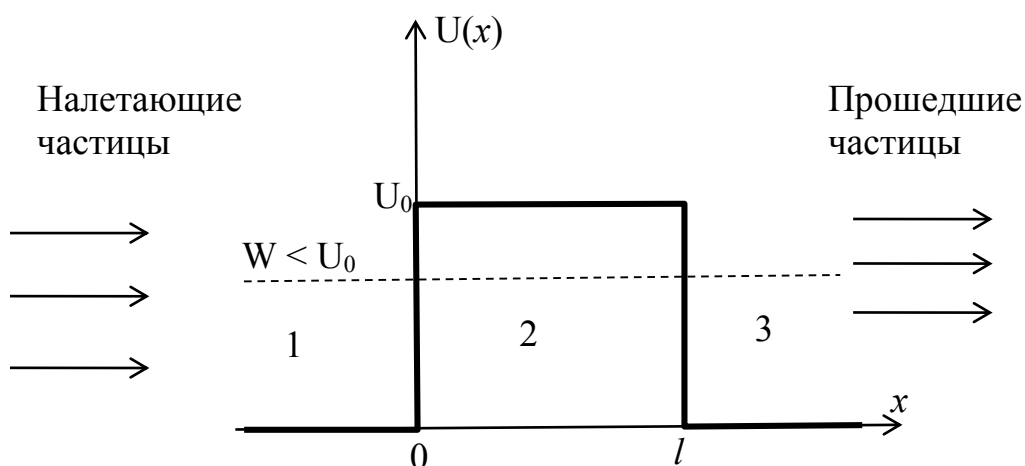


Рис. 3.5 Прохождение частицы сквозь барьер прямоугольной формы.

Перепишем (3.38) в форме

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - W)\Psi = 0 \quad (3.39)$$

Обозначим  $\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - W)$ , тогда (3.39) запишется

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - \beta^2\Psi = 0 \quad (3.40)$$

Решением уравнения (3.40) является волновая функция

$$\Psi_2 = A_2 e^{-\beta x}, \text{ где } \beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - W)} = \frac{\sqrt{2m(U_0 - W)}}{\hbar} \quad (3.41)$$

Рассчитаем плотность вероятности  $\rho_2(x)$  – обнаружить частицу внутри барьера

$$\rho_2(x) = |\Psi_2|^2 = A_2^2 \exp\left(-\frac{2\sqrt{2m(U_0 - W)}}{\hbar}x\right) = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - W)}x\right) \quad (3.42)$$

Рассчитаем плотность вероятности  $\rho_2(x)$  при  $x = l$ , это и будет искомая вероятность  $D$  – коэффициент прозрачности барьера, что частица преодолит барьер и окажется в области 3.

$$\begin{aligned} \rho_2(l) &= D \\ \text{или} \\ D &= D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - W)}l\right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Здесь  $D_0$  – коэффициент  $\sim 1$  (обычно при расчете принимается за 1);  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка;  $m$  – масса частицы;  $U_0$  – высота потенциального барьера;  $W$  – энергия частицы;  $l$  – ширина потенциального барьера.

Формула (3.43) является расчетной для задач на потенциальный барьер прямоугольной формы.

### Пример 5

Ядро атома углерода  ${}^{12}_6\text{C}$  с энергией  $W = 11,8$  эВ движется в положительном направлении оси  $x$  и налетает на прямоугольный потенциальный барьер высотой  $U_0 = 12$  эВ и шириной  $l_0 = 3$  пм. Определить вероятность прохождения ядром этого барьера. Во сколько раз надо расширить барьер, чтобы вероятность прохождения его протоном (при выше приведённых условиях) была такой же как для ядра атома углерода.

**Дано:**

${}^{12}_6\text{C}$  – ядро углерода;

$W = 11,8$  эВ;

$U_0 = 12$  эВ;

$l_0 = 3$  пм =  $3 \cdot 10^{-12}$  м;

$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг – масса протона;

$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка;

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – элементарный заряд.

---

**Найти:**

1)  $D$  – ?

$$2) \frac{l}{l_0} - ?$$

**Решение:**

1) Чтобы определить вероятность прохождения ядром барьера, воспользуемся формулой (3.43)

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_c(U_0 - W)}l_0\right) \quad (1)$$

Считаем  $D_0 \sim 1$ . Определим массу  $m_c$  ядра атома углерода. Воспользуемся обозначениями, которые даны в задаче –  $^{12}_6\text{C}$ . Верхний индекс здесь обозначает массу ядра углерода, выраженную в атомных единицах массы ( $m_a = 1,66 \cdot 10^{-27}$  кг – атомная единица массы). Следовательно:  $m_c = 12m_a$ . При подстановке  $U_0$  и  $W$  в (1) необходимо электрон-вольты перевести в джоули. Для этого  $U_0$  и  $W$  домножим на элементарный заряд  $e$ .

Подставляем все числовые параметры в (1), проводим вычисления, получаем ответ

$$D = \exp\left(-\frac{2}{1,05 \cdot 10^{-34}} \sqrt{2 \cdot 12 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} (12 - 11,8) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{-12}}\right) = 0,13$$

2) Чтобы найти ответ на второй вопрос, запишем условие равенства вероятности прохождения протоном барьера (при выше приведённых условиях) и ядра атома углерода.

$$D_p = D_c \rightarrow \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_p(U_0 - W)}l\right) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_c(U_0 - W)}l_0\right) \quad (2)$$

Равенство (2) возможно только в том случае, если равны показатели экспонент, следовательно

$$-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_p(U_0 - W)}l = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_c(U_0 - W)}l_0 \quad (3)$$

Сократим в (3) на одинаковые сомножители, получим:  $\sqrt{m_p}l = \sqrt{m_c}l_0$ . Выразим отсюда искомое соотношение  $\frac{l}{l_0}$ :

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{\frac{m_c}{m_p}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 3,45.$$

**Ответ:** 1)  $D = 0,13$ ; 2)  $\frac{l}{l_0} = 3,45$ .

## 4. ПОЛУПРОВОДНИКИ

### 4.1 Кристаллическая структура твердых тел

С точки зрения электрофизических свойств, твердые тела делят на три большие группы: металлы, диэлектрики и полупроводники.

Металлы – вещества, хорошо проводящие электрический ток, с удельным сопротивлением  $\rho = 10^{-8} \div 10^{-6}$  Ом·м. Удельное сопротивление металлов линейно растет с увеличением температуры.

Диэлектрики – вещества, которые практически не проводят электрический ток. Их удельное сопротивление  $\rho > 10^8$  Ом·м.

Промежуточное положение занимает обширный класс веществ, называемых полупроводниками. Их удельное сопротивление варьируется от  $10^{-6}$  до  $10^8$  Ом·м. Удельное сопротивление полупроводников очень сильно зависит от наличия примесей в материале, от температуры, воздействия света и т.д. Оно экспоненциально уменьшается с ростом температуры.

Свойства веществ зависят от их внутреннего строения. Рассмотрим твердые тела.

Большинство твердых веществ имеют кристаллическую структуру: расположение атомов в пространстве характеризуется периодической повторяемостью и образует геометрически правильный рисунок, называемый *кристаллической решёткой*. Точки, в которых размещены частицы кристалла, называют узлами решётки. В узлах кристаллической решётки могут находиться атомы, ионы или молекулы.

В зависимости от природы частиц, расположенных в узлах, и характера связи между ними различают четыре типа кристаллов: ионные, металлические, атомные и молекулярные.

#### Металлические кристаллы

При соединении атомов металла в кристаллическую решетку, валентные электроны атомов отрываются от своих атомов и свободно хаотично перемещаются по всему объему кристалла. В узлах кристаллической решётки металла остаются *положительные ионы*, пространство между которыми заполнено «газом» свободных электронов (рис. 4.1).

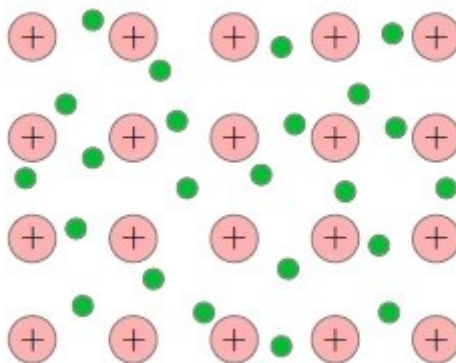


Рис. 4.1 Модель свободных электронов<sup>3</sup>.

Суммарный заряд свободных электронов равен по модулю и противоположен по знаку общему заряду положительных ионов, поэтому металлический проводник в целом оказывается электрически нейтральным. Валентные электроны в металлах являются "свободными", в том смысле, что они не связаны с отдельными атомами, хотя остаются связанными с кристаллической решеткой в целом. При приложении к металлу электрического поля его свободные электроны начинают упорядоченно двигаться под действием этого поля, образуя электрический ток. Проводимость металла обусловлена наличием свободных электронов.

#### Ионные кристаллы

В узлах ионной кристаллической решётки размещены положительно и отрицательно заряженные ионы. Силы взаимодействия между узлами являются в основном электростатическими (кулоновскими). Классическим примером ионного кристалла является кристалл поваренной соли NaCl, в котором атом натрия отдает свой валентный электрон атому хлора, превращаясь в положительно заряженный ион, а атом хлора, приняв дополнительный электрон, становится отрицательно заряженным ионом (рис. 4.2).

В кристаллическом состоянии такие вещества являются изоляторами, так

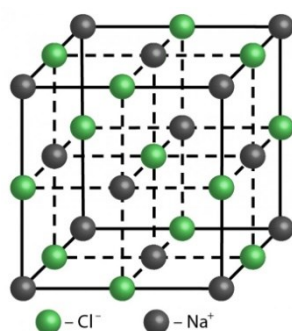


Рис. 4.2 Ионный кристалл поваренной соли<sup>4</sup>.

как отсутствуют свободные заряженные частицы, способные перемещаться под действием электрического поля. Вещество становится проводником только при нарушении кристаллической структуры (в растворе или расплаве).

<sup>3</sup>[https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2016/04/St20\\_01.jpg](https://ege-study.ru/wp-content/uploads/2016/04/St20_01.jpg)

<sup>4</sup>[erudicate.ru](http://erudicate.ru)

### Атомные кристаллы

В узлах кристаллической решетки атомных кристаллов находятся атомы, соединенные с соседними узлами ковалентными (парными) связями. При температуре абсолютного нуля и отсутствии внешних воздействий свободные заряженные частицы в таких кристаллах отсутствуют, и вещество является изолятором (рис. 4.3). При повышении температуры, освещении и других воздействиях ковалентные связи могут разрушаться, освобождая электроны. Тогда в кристалле появляется электропроводность. В зависимости от реакции на внешние воздействия, вещества с атомными кристаллическими решетками являются диэлектриками или полупроводниками.

Структура кристалла кремния

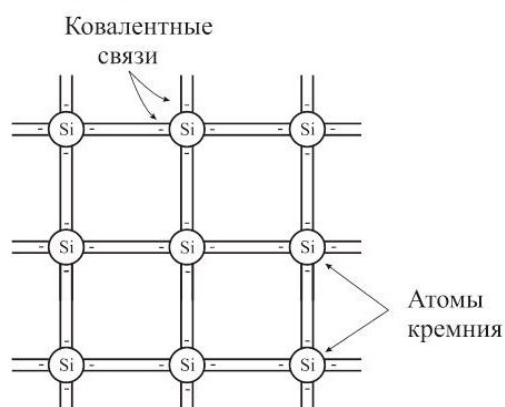


Рис. 4.3 Структура кристалла кремния <sup>5</sup>.

### Молекулярные кристаллы

В узлах кристаллической решетки молекулярных кристаллов расположены молекулы, соединенные между собой Ван-дер-Ваальсовыми силами. Такие вещества без нарушения структуры не проводят электрический ток, т.е., являются диэлектриками.

## 4.2 Зонная структура кристаллов

Разделение веществ на классы можно объяснить при помощи *зонных диаграмм*, изображающих энергетическое строение вещества.

В одиночных атомах электроны обладают строго заданными значениями энергии, которые называются энергетическими уровнями. Каждому состоянию электрона в атоме соответствует свой энергетический уровень. Энергетические уровни заполняются электронами по принципу наименьшей энергии, т.е. снизу вверх. Состояние, при котором все электроны обладают наименьшими из воз-

<sup>5</sup> <http://900igr.net/datas/fizika/Elektrotehnika-i-elektronika/0131-131-Elektricheskie-svojstva-poluprovodnikov.jpg>

можных значений энергии, называется основным. При поглощении атомом дополнительной энергии электроны могут переходить в состояние с большей энергией, которое называется возбужденным. *По принципу Паули*, в одном и том же атоме не может быть более одного электрона в одном квантовом состоянии.

При соединении атомов в кристаллическую структуру, валентные электроны различных атомов могут взаимодействовать между собой и остальными атомами кристалла. В результате понижаются потенциальные барьеры, отделяющие электроны в соседних атомах. Валентные электроны становятся способными перемещаться от атома к атому. Чтобы электроны кристалла, находящиеся на одном и том же энергетическом уровне, не оказались в одном и том же состоянии (что запрещено принципом Паули), происходит расщепление энергетического уровня в каждом атоме на близкие подуровни. Количество подуровней в простейшем случае соответствует количеству атомов в кристалле. Энергетический уровень превращается в энергетическую зону, которую называют разрешенной зоной. Разность энергий между отдельными подуровнями разрешенной энергетической зоны очень мала, примерно  $10^{-22}$  эВ. Поэтому спектр значений энергии электрона в разрешенной зоне можно считать сплошным. Ширина разрешенных энергетических зон измеряется несколькими эВ. Верхний энергетический уровень разрешенной зоны называют **потолком**, нижний – **дном**. Интервалы между разрешенными зонами называются **запрещенными энергетическими зонами** и в них электроны находится не могут.

Поскольку электроны стремятся занять энергетические уровни с наинизшей энергией, то в кристалле нижние энергетические зоны оказываются полностью заполненными, а самые верхние заполнены либо частично, либо совершенно свободны.

Электрические свойства металлов, диэлектриков и полупроводников зависят от заполненности разрешенных зон электронами и ширины запрещенных зон. В зависимости от этого, разрешенные зоны условно делят на свободные (без электронов), полностью заполненные (содержащие электроны на всех уровнях) и частично заполненные.

В металлах самая верхняя разрешенная зона, имеющая электроны, не полностью заполнена электронами, и чтобы электроны перешли на более высокие энергетические уровни этой же зоны, достаточно небольшой энергии теплового движения или электрического поля (рис. 4.4). Например, при  $T=1$  К энергия теплового движения  $kT \approx 10^{-4}$  эВ, что гораздо больше разности энергий соседних уровней зоны. Возможность свободного наращивания энергии электронов при их переходах по уровням в энергетической зоне соответствует возможности свободного перемещения электронов по металлу, что обуславливает хорошую проводимость и теплопроводность металлов. Эту зону металла называют зоной проводимости.

Теперь рассмотрим кристаллы, у которых верхняя разрешенная энергетическая зона, имеющая электроны, заполнена электронами полностью. Внешнее электрическое поле в таком случае не в состоянии изменить характер движения

электронов, не разрушая кристалл. Внутри же самой полностью заполненной зоны, не содержащей ни одного свободного уровня, оно может вызывать лишь перестановку электронов местами, что не нарушает симметрии их распределения по скоростям. Это не приводит к возникновению электрического тока в таких кристаллах.

Таким образом, твердые тела с полностью заполненными электронами энергетическими зонами являются *непроводниками*. По ширине запрещенной зоны непроводники делятся на *диэлектрики* и *полупроводники*. Верхняя заполненная зона полупроводников и диэлектриков называется *валентной зоной*, следующая за ней свободная зона называется *зоной проводимости*.

К диэлектрикам относят тела, имеющие относительно широкую запрещенную зону. У типичных диэлектриков  $\Delta W > 3$  эВ. Так, у алмаза  $\Delta W = 5,2$  эВ; у нитрида бора  $\Delta W = 4,6$  эВ; у  $\text{Al}_2\text{O}_3$  –  $\Delta W = 7$  эВ.

У типичных полупроводников ширина запрещенной зоны менее 3 эВ. Например, у германия  $\Delta W = 0,66$  эВ; у кремния  $\Delta W = 1,12$  эВ; у антимонида индия  $\Delta W = 0,17$  эВ.

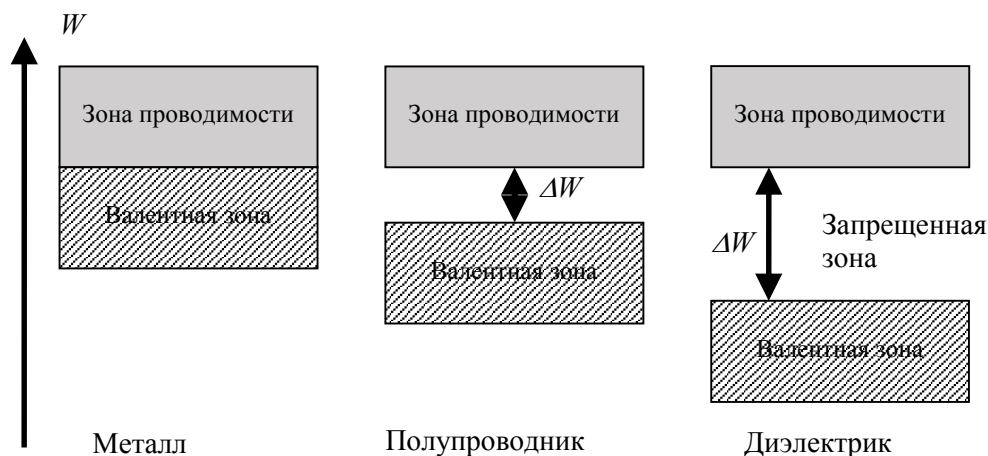


Рис. 4.4 Энергетические диаграммы металла, полупроводника и диэлектрика.

### 4.3 Собственные полупроводники

#### Собственная электропроводность

Собственными полупроводниками являются химически чистые полупроводники, а их проводимость называется **собственной проводимостью**. Примером собственных полупроводников могут служить химически чистые Ge, Si, а также многие химические соединения: InSb, GaAs, CdS и др.

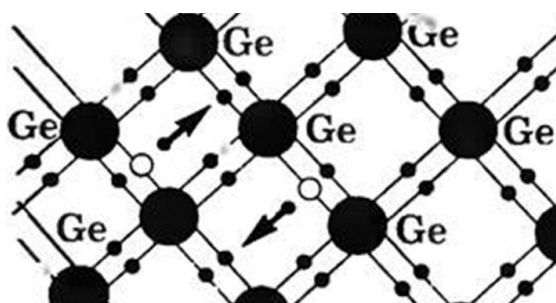


Рис. 4.5 Собственная проводимость германия<sup>6</sup>.

Возникновение собственной электропроводности показано на примере германия на рис. 4.5. Большие черные кружочки – атомы германия. Маленькие черные кружочки – электроны. Черточками соединены пары атомов, между которыми установлена ковалентная связь с помощью электрона одного из этих атомов. Белые кружочки – разорванные ковалентные связи, отсутствие электрона в ковалентной связи, «дырка». При температуре абсолютного нуля все валентные электроны участвуют в ковалентных связях и не могут свободно перемещаться по кристаллу. Электропроводность отсутствует. При повышении температуры или при других воздействиях некоторые электроны могут получить дополнительную энергию, достаточную для разрыва ковалентной связи. Электроны покидают связь и становятся свободными в пределах кристалла (на рисунке показаны черными точками со стрелочками вне связи). На их месте в ковалентной связи возникает некомпенсированный положительный заряд, равный по модулю заряду электрона (на рисунке – пустой кружочек). Такая незаполненная («разорванная») ковалентная связь называется **дыркой**. Она может заполниться электроном из соседней ковалентной связи. В результате дырка будет перемещаться по кристаллу. Движение свободных электронов и дырок в отсутствии электрического поля будет хаотичным.

Дырки являются квазичастицами. Они характеризуются свойствами:

1. Не существуют в вакууме. В отсутствии коллектива электронов представление о дырках лишено смысла
2. Описывают поведение полупроводника во внешних электромагнитных полях
3. Не подходят для описания свойств полупроводника в гравитационных полях.

Если на кристалл наложить электрическое поле, то свободные электроны (электроны проводимости) будут двигаться против направления напряженности электрического поля, а дырки – по направлению напряженности электрического поля. И то, и другое движение приводит к возникновению электрического тока. Электропроводность, возникающая в собственных полупроводниках и обусловленная движением электронов и дырок, называется собственной. Количество свободных электронов и количество дырок в собственном полупроводнике одинаковы.

<sup>6</sup> <http://900igr.net/up/datas/255688/027.jpg>

Поведение электронов и дырок можно описать с точки зрения энергетической диаграммы. При 0 К и отсутствии других внешних факторов собственные полупроводники ведут себя как диэлектрики. При повышении же температуры электроны с верхних уровней валентной зоны могут быть переброшены на нижние уровни зоны проводимости (рис. 4.6). При наложении на кристалл электрического поля они перемещаются против поля и создают электрический ток.

В результате тепловых забросов электронов из валентной зоны в зону проводимости в валентной зоне возникают вакантные состояния, которые как раз и называются дырками. Во внешнем электрическом поле на освободившееся от электрона место (дырку) может переместиться электрон с соседнего уровня, а дырка появится в том месте, откуда ушел электрон, и т. д. Такой процесс заполнения дырок электронами равносителен перемещению дырки в направлении, противоположном движению электрона, так, как если бы дырка обладала положительным зарядом, равным по величине заряду электрона.

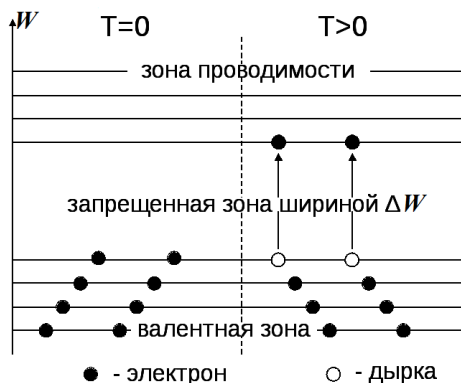


Рис. 4.6 Генерация электронно-дырочных пар<sup>7</sup>.

В собственных полупроводниках наряду с процессом генерации электронно-дырочных пар идет обратный процесс рекомбинации, при котором электроны переходят из зоны проводимости в валентную зону, отдавая энергию решетке или испуская квант электромагнитного излучения. В результате процессов генерации и рекомбинации в полупроводнике при данной температуре устанавливается некоторая равновесная концентрация электронов и дырок

Таким образом, в собственных полупроводниках наблюдаются два механизма проводимости: электронный и дырочный. Число электронов в зоне проводимости равно числу дырок в валентной зоне, так как последние соответствуют электронам, возбужденным в зону проводимости. Следовательно, если концентрации электронов проводимости и дырок обозначить соответственно  $n$  и  $p$ , то

$$n = p = n_i \quad (4.1)$$

где индекс  $i$  означает собственный полупроводник.

Запишем закон Ома в дифференциальной форме:

<sup>7</sup> [https://studfiles.net/html/2706/202/html\\_Xnv3xLWLLX.21PC/img-Tk9vm3.png](https://studfiles.net/html/2706/202/html_Xnv3xLWLLX.21PC/img-Tk9vm3.png)

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E}, \quad (4.2)$$

где  $\vec{j}$  – вектор плотности тока,  $\rho$  – удельное сопротивление вещества,  $\sigma$  – электропроводность (удельная проводимость) вещества,  $\vec{E}$  – вектор напряженности электрического поля в образце. Электропроводность вещества определяется величиной заряда  $q$  носителей тока, их концентрацией  $n$ , подвижностью  $\mu$ . Подвижность  $\mu$  – это коэффициент пропорциональности между модулем дрейфовой скорости  $v_{др}$  носителей тока и величиной напряженности электрического поля:

$$v_{др} = \mu E$$

В полупроводниках носителями тока являются отрицательно заряженные свободные электроны (электроны проводимости) и положительно заряженные дырки, имеющий одинаковый по модулю заряд, равный модулю заряда электрона  $q_e$ . Электропроводность полупроводника определяется формулой:

$$\sigma = q_e (n \cdot \mu_n + p \cdot \mu_p), \quad (4.3)$$

где  $n$  – концентрация электронов проводимости,  $p$  – концентрация дырок,  $\mu_n$  – подвижность электронов проводимости,  $\mu_p$  – подвижность дырок.

В чистом беспримесной полупроводнике (собственном полупроводнике) концентрации электронов и дырок равны между собой  $n = p = n_i$ . Исходя из формулы (4.3), в собственном полупроводнике электропроводность описывается формулой:

$$\sigma = q_e n_i (\mu_n + \mu_p). \quad (4.4)$$

Особенностью полупроводников является специфическая зависимость их электропроводности от температуры. Строго говоря, от температуры зависят и концентрация, и подвижности носителей заряда. Однако во многих случаях в узком диапазоне температур зависимостью подвижностей от температуры можно пренебречь и считать подвижности постоянными, не зависящими от температуры. Тогда вид зависимости электропроводности от температуры будет определяться видом зависимости концентрации носителей тока от температуры.

Зависимость концентрации собственных носителей от температуры описывается экспонентой:

$$n_i = n_0 e^{-\Delta W / (2kT)}, \quad (4.5)$$

где  $\Delta W$  – ширина запрещенной зоны (минимальная энергия образования электронно-дырочной пары),  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура образца,  $n_0$  – концентрация носителей при высоких температурах.

Концентрация  $n_0$  представляет собой максимальную возможную концентрацию электронов проводимости и дырок. Она определяется по формуле

$$n_0 = \sqrt{N_C \cdot N_V},$$

где  $N_C$  – эффективная плотность состояний в зоне проводимости,  $N_V$  – эффективная плотность состояний в валентной зоне.

Обычно соблюдается условие  $N_C \approx N_V$ , поэтому можно считать, что  $n_0 = N_C$ .

Исходя из (4.5), получаем формулу для  $\sigma$ :

$$\sigma = n_0 q_e (\mu_n + \mu_p) e^{-\Delta W / (2kT)} \quad (4.6)$$

Обозначим  $\sigma_0 = q_e n_0 (\mu_n + \mu_p)$  и условно назовем это электропроводностью образца при бесконечно большой температуре. В результате получим выражение для электропроводности образца:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\Delta W / (2kT)} \quad (4.7)$$

Таким образом, зависимость электропроводности собственного полупроводника от температуры является экспоненциальной.

### Пример 6.

При температуре 27 °С находится образец, изготовленный из германия. Длина образца 10 мм, ширина и высота по 1 мм. При данной температуре собственная электропроводность германия равна 0,02 (Ом·см)<sup>-1</sup>. Полупроводник нагрели до 100 °С. Чему станет равно сопротивление образца при этой температуре? Ширина запрещенной зоны германия равна 0,67 эВ и считается постоянной в данном интервале температур. Тепловым расширением образца пренебречь.

**Дано:**

$$T_1 = 27 \text{ }^{\circ}\text{C} = 300 \text{ K}$$

$$T_2 = 100 \text{ }^{\circ}\text{C} = 373 \text{ K}$$

$$l = 10 \text{ мм} = 10^{-2} \text{ м}$$

$$a = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

$$b = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

$$\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{см}} = 2 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} = 8,62 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эВ}}{\text{К}}$$

**Найти:**

$$R_2 - ?$$

**Решение:**

Зависимость сопротивления от геометрических размеров и материала образца:

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma \cdot a \cdot b}.$$

Электропроводность при данных температурах:

$$\sigma_1 = \sigma_0 e^{-\Delta W / (2kT_1)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 e^{-\Delta W / (2kT_2)}$$

Исключим неизвестную нам электропроводность при высоких температурах.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_0 e^{-\Delta W/(2kT_1)}}{\sigma_0 e^{-\Delta W/(2kT_2)}}$$

Отсюда:

$$R_2 = \frac{l}{\sigma_1 \cdot a \cdot b} \cdot e^{(-\frac{\Delta W}{2k}(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}))}$$

Производим расчет:

$$R_2 = \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}} \cdot e^{\left(-\frac{0,67}{2 \cdot 8,62 \cdot 10^{-5}}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{373}\right)\right)} = 396(\text{Ом})$$

Ответ:  $R_2 = 396 \text{ Ом}$ .

#### 4.4 Примесные полупроводники

Некоторые примеси, внедренные в полупроводниковый материал, существенно изменяют его электропроводность.

*Донорная* проводимость возникает в полупроводниках, в которых внедрены атомы примеси с валентностью, на единицу больше, чем у атомов основного вещества. Примесные атомы замещают атомы основного вещества в узлах кристаллической решетки и создают ковалентные (или ионно-ковалентные) связи с окружающими их атомами основного вещества. «Лишний» валентный электрон примеси не участвует в создании такой связи и оказывается наиболее слабо связанным со своим атомом. За счет энергии теплового движения он легко отрывается от атома и становится свободным электроном в пределах кристалла, способным участвовать в создании электрического тока. Поскольку ковалентные связи при этом не нарушаются, то дырки не возникают. Такой полупроводник имеет электронную проводимость и называется *электронным, донорным* или полупроводником *n-типа*. При ионизации доноров полупроводник в целом остается электронейтральным, поскольку отрицательный заряд свободных электронов в точности равен положительному заряду ионизованных неподвижных доноров, находящихся в узлах кристаллической решетки (Рис. 4.7, а).

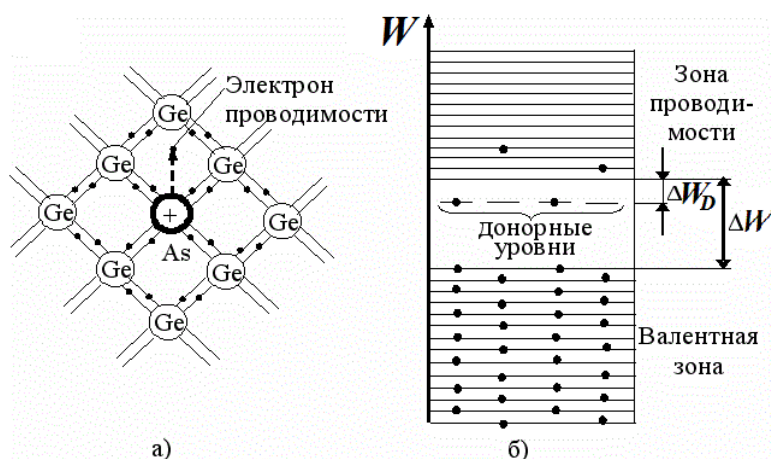


Рис. 4.7 Донорный полупроводник<sup>8</sup>.

С точки зрения зонной теории процесс ионизации донора можно представить следующим образом. Поскольку атом донора является чужеродным для данной кристаллической решетки, то его энергетический спектр оказывается отличным от спектра атомов основного вещества. Один из энергетических уровней валентного электрона донора оказывается в запрещенной зоне основного вещества, причем донорный уровень оказывается расположенным близко к дну зоны проводимости (рис. 4.7, б). Энергии теплового движения может оказаться достаточно, чтобы перевести электрон с донорного уровня в зону проводимости. Образующиеся при этом положительные заряды принадлежат неподвижным ионам донора и не участвуют в электропроводности. Энергия активации донора  $\Delta W_D$  обычно в несколько раз меньше ширины запрещенной зоны  $\Delta W$ , поэтому вероятность переброски электрона из валентной зоны в зону проводимости намного меньше вероятности переброски электрона с донорного уровня. Поэтому количество электронов в зоне проводимости ( $n_n$ ) на несколько порядков больше количества дырок в валентной зоне ( $p_n$ ). В донорном полупроводнике основными носителями тока являются электроны. Присутствующие в небольшом количестве дырки являются неосновными носителями заряда.

*Акцепторная* проводимость возникает при внедрении атомов примеси с валентностью, на единицу меньшей, чем у атомов основного вещества. Примесные атомы в узлах кристаллической решетки создают ковалентные связи с атомами основного вещества, при этом для создания полноценных связей, характерных для данного кристалла, у примеси не хватает одного электрона. При тепловом движении атомов примесь захватывает недостающий электрон у других атомов основного вещества, разрушая ковалентную связь между атомами и создавая свою ковалентную связь с атомом основного вещества. При этом примесь превращается в отрицательно заряженный ион в кристаллической решетке, а положительно заряженная разрушенная ковалентная связь между атомами основного

<sup>8</sup> <http://geum.ru/next/images/238289-nomer-e73fd6f.gif>

вещества («дырка») может перемещаться по кристаллу за счет разрушения других ковалентных связей и заполнения уже разорванной связи (рис.4.8, а).

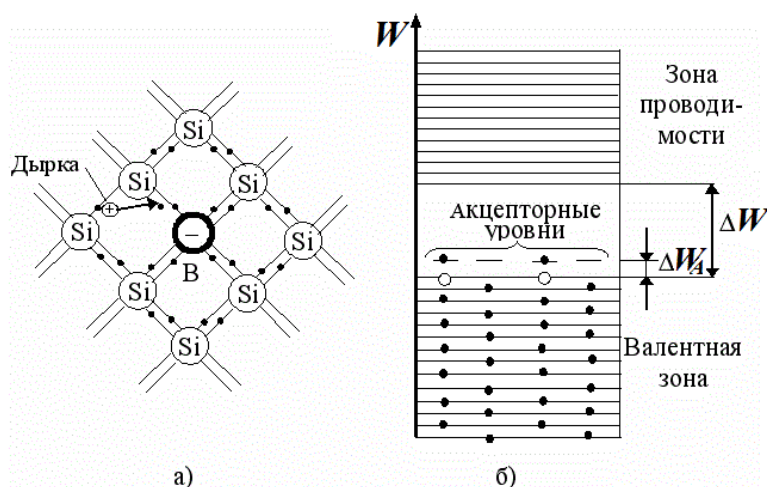


Рис. 4.8 Акцепторный полупроводник<sup>9</sup>.

С точки зрения зонной теории процесс ионизации акцептора можно представить следующим образом. Поскольку атом акцептора является чужеродным для данной кристаллической решетки, то его энергетический спектр оказывается отличным от спектра атомов основного вещества. Один из энергетических уровней атома акцептора оказывается в запрещенной зоне энергии основного вещества, причем акцепторный уровень оказывается расположенным близко к потолку валентной зоны (рис. 4.8, б). Энергии теплового движения может оказаться достаточно, чтобы перевести электрон с верхнего уровня валентной зоны на уровень акцептора. В валентной зоне возникает незаполненное состояние – дырка. Образующиеся при этом отрицательные заряды принадлежат неподвижным ионам акцептора и не участвуют в электропроводности. Энергия активации донора  $\Delta W_A$  обычно в несколько раз меньше ширины запрещенной зоны  $\Delta W$ , поэтому вероятность переброски электрона из валентной зоны в зону проводимости намного меньше вероятности переброски электрона из валентной зоны на уровень акцептора. Поэтому количество дырок в валентной зоне ( $p_p$ ) на несколько порядков больше количества электронов в зоне проводимости ( $n_p$ ). В акцепторном полупроводнике основными носителями заряда являются дырки. Присутствующие в небольшом количестве свободные электроны являются неосновными носителями заряда.

В примесном полупроводнике произведение концентраций свободных электронов  $n$  и дырок  $p$  при тепловом равновесии есть величина постоянная, равная квадрату концентрации носителей заряда  $n_i$  в собственном полупроводнике при той же температуре:

$$np = n_i^2 \quad (4.8)$$

<sup>9</sup> [http://do.gendocs.ru/pars\\_docs/tw\\_refs/239/238289/238289\\_html\\_1fc5b48f.gif](http://do.gendocs.ru/pars_docs/tw_refs/239/238289/238289_html_1fc5b48f.gif)

Энергия ионизации примеси намного меньше энергии разрыва ковалентных связей между атомами основного вещества (ширины запрещенной зоны), поэтому при не слишком высоких температурах концентрация носителей заряда, появившихся за счет ионизации примеси, намного больше концентрации собственных носителей. Обычно при температурах, являющихся рабочими для большинства полупроводниковых приборов, концентрация основных носителей заряда (электронов в  $n$  – типе и дырок в  $p$  – типе) примерно равна концентрации ионизированной примеси.

Из соотношения (4.8) можно определить концентрацию неосновных носителей заряда в примесном полупроводнике. Так, в донорном полупроводнике, где основными носителями заряда являются электроны с концентрацией  $n_n$ , для концентрации дырок ( $p_n$ ) получим:

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} \quad (4.9)$$

Аналогично для концентрации электронов ( $n_p$ ) в акцепторном полупроводнике с концентрацией основных носителей  $p_p$  можно записать:

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} \quad (4.10)$$

#### 4.5 Контакт электронного и дырочного полупроводников

При контакте двух полупроводников  $n$  - и  $p$ -типа концентрации электронов и дырок по обе стороны от границы сильно различаются. Электроны из области  $n$  диффундируют в область  $p$ , заполняют в ней разорванные ковалентные связи, происходит процесс рекомбинации носителей. В приконтактной области исчезают носители тока, но остаются неподвижные ионизированные примеси, создающие электрическое поле  $E_k$ . Это поле препятствует дальнейшей диффузии электронов. В результате получаются две электрически нейтральные области  $p$ - и  $n$ -типа, разделенные областью пространственного заряда, обедненной носителями (рис. 4.9). При температурах, являющихся рабочими для большинства приборов, контактную разность потенциалов в области пространственного заряда можно рассчитать по формуле:

$$\varphi_k = \frac{kT}{q_e} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}, \quad (4.9)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура прибора,  $q_e$  – элементарный заряд,  $N_A$  – концентрация акцепторов в  $p$ -области,  $N_D$  – концентрация доноров в  $n$ -области,  $n_i$  – собственная концентрация носителей.

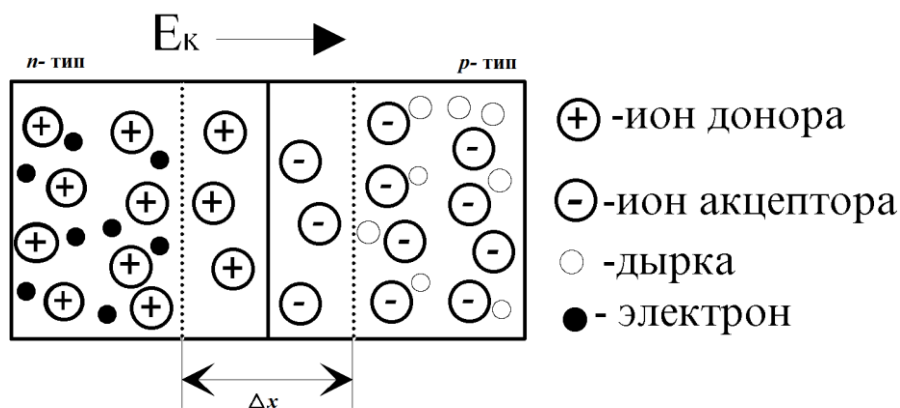


Рис. 4.9  $p$ - $n$  переход в равновесии<sup>10</sup>.

Ширина области пространственного заряда (ширина  $p$ - $n$  перехода) в условиях равновесия может быть рассчитана по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2\varepsilon\varepsilon_0}{q_e} \left( \frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right) \cdot \varphi_k}, \quad (4.10)$$

где  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость полупроводника,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Если к  $p$ -области приложить положительный потенциал, а к  $n$ -области приложить отрицательный потенциал, то такая разность потенциалов называется прямым смещением. Напряженность внешнего электрического поля  $E_{\text{внеш}}$  при таком смещении оказывается направленной противоположно направлению собственного электрического поля перехода  $E_k$ , общая напряженность уменьшается, общая разность потенциалов уменьшается, облегчается диффузия электронов из  $n$ -области в  $p$ -область. Через  $p$ - $n$  переход течет ток, который называется прямым. Ширина области пространственного заряда уменьшается (рис. 4.10).

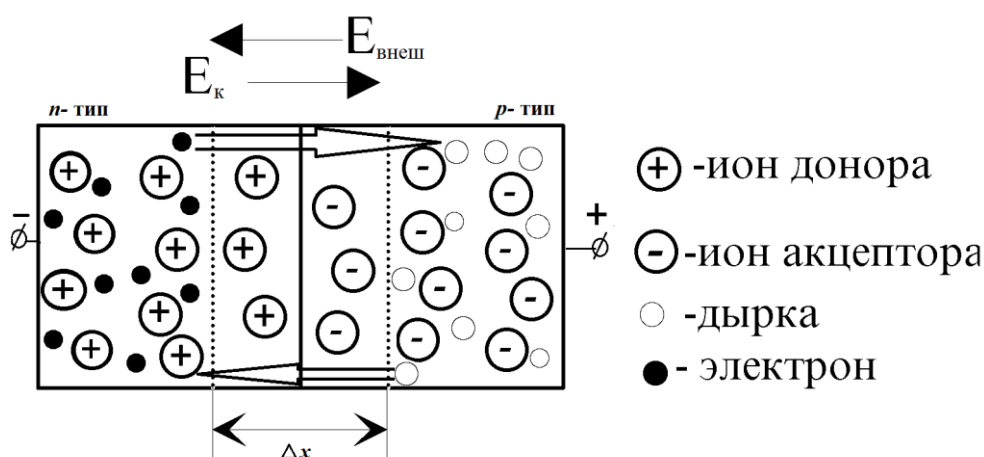


Рис. 4.10.  $p$ - $n$  переход при прямом смещении.

<sup>10</sup> [https://studfiles.net/html/2706/811/html\\_Ahwh4edDkS.0bvc/img-gq1JMW.png](https://studfiles.net/html/2706/811/html_Ahwh4edDkS.0bvc/img-gq1JMW.png)

Если к  $n$ -области приложить положительный потенциал, а к  $p$ -области приложить отрицательный потенциал, то такая разность потенциалов называется обратным смещением (рис. 4.11). Напряженность внешнего электрического поля  $E_{\text{внеш}}$  при таком смещении оказывается сонаправленной с собственным электрическим полем перехода  $E_k$ , общая напряженность увеличивается, общая разность потенциалов увеличивается, диффузия электронов из  $n$ -области в  $p$ -область еще больше затрудняется. Через  $p$ - $n$  переход может течь ток, обусловленный дрейфом неосновных носителей заряда (электронов из  $p$ -области и дырок из  $n$ -области), который на несколько порядков меньше прямого тока и называется обратным. Ширина области пространственного заряда увеличивается.

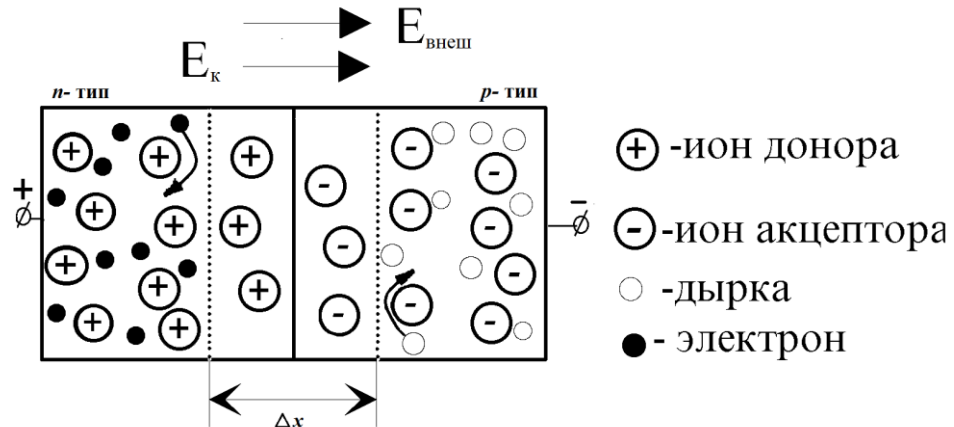


Рис. 4.11  $p$ - $n$  переход при обратном смещении.

Ширина области пространственного заряда при наличии электрического смещения может быть рассчитана по формуле:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2\epsilon\epsilon_0}{q_e} \left( \frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} \right) \cdot (\varphi_k \mp U)}, \quad (4.11)$$

где знак «минус» берется для прямого смещения  $U$ , а знак «плюс» берется для обратного смещения  $U$ .

ВАХ идеального  $p$ - $n$  перехода описывается формулой:

$$I = I_0 \cdot \left( e^{\pm \frac{q_e U}{kT}} - 1 \right), \quad (4.12)$$

где  $I_0$  – величина силы тока при достаточно большом обратном смещении, знак «плюс» берется для прямого смещения  $U$ , а знак «минус» берется для обратного смещения  $U$  (рис. 4.12).

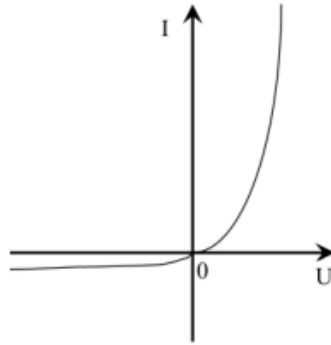


Рис. 4.12 ВАХ идеального  $p$ - $n$  перехода.

### Пример 7

При обратном напряжении 60 В величина тока через кремниевый  $p$ - $n$  переход равна 0,5 мкА. Чему равна сила тока через этот  $p$ - $n$  переход при прямом напряжении 0,3 В? Температура  $p$ - $n$  перехода 300 К.

**Дано:**

$$U_{\text{обр}} = 60 \text{ В}$$

$$I_{\text{обр}} = 0,5 \text{ мкА} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ А}$$

$$U_{\text{пр}} = 0,3 \text{ В}$$

**Найти:**

$I_{\text{пр}}$  -?

**Решение:**

ВАХ идеального  $p$ - $n$  перехода описывается формулой:

$$I = I_0 \cdot \left( e^{\pm \frac{q_e U}{kT}} - 1 \right)$$

Определим  $I_0$ , учитывая, что знак обратного тока – отрицательный.

$$I_0 = \frac{I_{\text{обр}}}{\left( e^{-\frac{q_e U}{kT}} - 1 \right)} = \frac{-5 \cdot 10^{-7}}{\left( e^{-\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 60}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} - 1 \right)} \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ А}$$

Определим искомую величину прямого тока:

$$I = I_0 \cdot \left( e^{\frac{q_e U}{kT}} - 1 \right) = 5 \cdot 10^{-7} \cdot \left( e^{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,3}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} - 1 \right) = 0,055 \text{ А}$$

Ответ: 55 мА

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1 – Фундаментальные физические величины

| №<br>п п | Величина                               | Обозначение. | Значение                                                     |
|----------|----------------------------------------|--------------|--------------------------------------------------------------|
| 1.       | Магнитная постоянная                   | $\mu_0$      | $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м                                    |
| 2.       | Электрическая постоянная               | $\epsilon_0$ | $8,85418782 \cdot 10^{-12}$ Ф/м                              |
| 3.       | Скорость света в вакууме               | c            | $299792458$ м/с $\approx 3 \cdot 10^8$ м/с                   |
| 4.       | Элементарный заряд                     | e            | $1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл                                |
| 5.       | Постоянная Планка                      | h            | $6,626176 \cdot 10^{-34}$ Дж·с                               |
|          | Постоянная Планка (редуцированная)     | $\hbar$      | $1,0545887 \cdot 10^{-34}$ Дж·с                              |
| 6.       | Число Авогадро                         | $N_A$        | $6,0220943 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>                 |
| 7.       | Атомная единица массы                  | а.е.м.       | $1,6605655 \cdot 10^{-27}$ кг                                |
| 8.       | Энергетический эквивалент одной а.е.м. |              | 931,5016 МэВ                                                 |
| 9.       | Масса покоя: масса электрона           | $m_e$        | $9,109534 \cdot 10^{-31}$ кг                                 |
|          |                                        |              | $5,4858026 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.                             |
| 10.      | масса мюона                            | $m_\mu$      | $1,883566 \cdot 10^{-28}$ кг                                 |
|          |                                        |              | $0,11342920$ а.е.м.                                          |
| 11.      | масса протона                          | $m_p$        | $1,6726485 \cdot 10^{-27}$ кг                                |
|          |                                        |              | $1,007276470$ а.е.м.                                         |
| 12.      | масса нейтрона                         | $m_n$        | $1,6749543 \cdot 10^{-27}$ кг                                |
|          |                                        |              | $1,008665012$ а.е.м.                                         |
| 13.      | Удельный заряд электрона               | $e/m_e$      | $1,7588047 \cdot 10^{11}$ Кл·кг                              |
| 14.      | Число Фарадея                          | F            | $9,648456 \cdot 10^4$ ККл/моль                               |
| 15.      | Постоянная Ридберга                    | R            | $1,097373142 \cdot 10^7$ м <sup>-1</sup>                     |
| 16.      | Боровский радиус                       | $a_0$        | $5,2917706 \cdot 10^{-11}$ м                                 |
| 17.      | Комптоновская длина волны: электрона   | $\lambda_k$  | $2,4263089 \cdot 10^{-12}$ м                                 |
| 18.      | протона                                | $\lambda_k$  | $1,3214099 \cdot 10^{-15}$ м                                 |
| 19.      | Магнетон Бора                          | $\mu_B$      | $9,274078 \cdot 10^{-24}$ Дж/Т                               |
| 20.      | Ядерный магнетон                       | $\mu_{яд}$   | $5,050824 \cdot 10^{-27}$ Дж/Т                               |
| 21.      | Магнитный момент: электрона            | $\mu_e$      | $9,284832 \cdot 10^{-24}$ Дж/Т                               |
| 22.      | протона                                | $\mu_p$      | $1,4106171 \cdot 10^{-26}$ Дж/Т                              |
| 23.      | Газовая постоянная                     | R            | $8,31441$ Дж/(моль·К)                                        |
| 24.      | Объем 1 моля идеального газа           | $V_0$        | $2,241383 \cdot 10^{-2}$ м <sup>3</sup> /моль                |
| 25.      | Постоянная Больцмана                   | k            | $1,380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К                               |
| 26.      | Постоянная Стефана-Больцмана           | $\sigma$     | $5,67032 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> ·К <sup>4</sup> ) |
| 27.      | Гравитационная постоянная              | G            | $6,6720 \cdot 10^{-11}$ Н·м <sup>2</sup> /кг <sup>2</sup>    |

| №<br>п п | Величина                | Обозна-<br>чение. | Значение                      |
|----------|-------------------------|-------------------|-------------------------------|
| 28.      | Квант магнитного потока | $\Phi_0$          | $2,0678506 \cdot 10^{-15}$ Вб |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 5-и тт. Том 1. Механика: учебное пособие / И.В. Савельев. — Санкт-Петербург: Лань, 2011. — 352 с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 5-и тт. Том 2. Электричество и магнетизм: учебное пособие / И.В. Савельев. — Санкт-Петербург: Лань, 2011. — 352 с.
3. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 5-и тт. Том 3. Молекулярная физика и термодинамика: учебное пособие / И.В. Савельев. — Санкт-Петербург: Лань, 2011. — 224 с.
4. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 5-и тт. Том 4. Волны. Оптика: учебное пособие / И.В. Савельев. — Санкт-Петербург: Лань, 2011. — 256 с.
5. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 5-и тт. Том 5. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц: учебное пособие / И.В. Савельев. — Санкт-Петербург: Лань, 2011. — 384 с.
6. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. — М.: Издательский центр «Академия», 2007. — 560 с.
7. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики: учеб. пособие / Т.И. Трофимова. — М.: Высш. шк., 2008. — 404 с.
8. Трофимова, Т. И. Физика [Текст] : учебник / Т. И. Трофимова. — М.: Академия, 2012. — 316 с.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 3-х тт. Том 1. Механика: учебное пособие / И.В. Савельев. — М.: Наука., 1988. — 304 с.
2. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 3-х тт. Том 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.: учебное пособие / И.В. Савельев. — М.: Наука., 1988. — 496 с.
3. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 3-х тт. Том 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц.: учебное пособие / И.В. Савельев. — М.: Наука., 1988. — 304 с.
4. Лисейкина, Т. А. Курс физики. Раздел 1. Механика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Т. А. Лисейкина, Т. Ю. Пинегина, А. Г. Черевко ; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. — Электрон. дан. (1 файл). — Новосибирск : СибГУТИ, 2007. — 122 с.
5. Лисейкина, Т. А. Курс физики. Раздел шестой. Статистическая физика и термодинамика [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Т. А. Лисейкина, Т. Ю. Пинегина, А. Г. Черевко ; Сиб. гос. ун-т телекоммуникаций и информатики. — Электрон. дан. (1 файл). — Новосибирск : СибГУТИ, 2013. — 122 с.
6. Лубский В.В., Грищенко И.В. Волновые свойства электромагнитного поля: Лабораторный практикум по физике/СибГУТИ. — Новосибирск, 2018 г.—65 с.

7. Черевко А.Г., Гулидов А.И. Физика конденсированного состояния. Лабораторный практикум: Методическое пособие. – Новосибирск: СибГУТИ, 2017. –129 с.